ENCICLOPEDIA

DELLE

ARTI E INDUSTRIE

COMPILATA COLLA DIREZIONE

DELL'INGEGNERE

M^SE RAFFAELE PARETO

E DEL CAV. INGEGNERE

GIOVANNI SACHERI

VOLUME QUINTO

TORINO
UNIONE TIPOGRAFICO-EDITRICE
1885

du tunnel sous les Alpes et de l'emploi des machines dans l'intérieur des mines. Liège 1863. — P. de Saint-Robert, *Théorie du compresseur à colonne d'eau de MM. Sommeiller, Grattoni et Grandis* (*Annales des mines*, série 5e, vol. III, 1863). — *Rapport du Conseil Fédéral Suisse aux Gouvernements des États qui ont participé à la subvention de la ligne du St-Gothard sur l'état actuel de l'entreprise.* Berne 1874. — I. Benetti, *Relazione tecnica d'un viaggio d'istruzione fatto dagli allievi della Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna.* Bologna 1880. — Armengaud (ainé), *Publication industrielle de machines*, etc., vol. 2°. — *I magli a reazione d'aria del sistema Chenot* (*L'Ingegneria civile*, ecc., Torino 1875). — A. Bottiglia, *Considerazioni teoriche e deduzioni pratiche sul miglior impiego dell'aria compressa nelle locomotive* (*L'Ingegneria civile*, ecc., Torino 1877). — G. Sacheri, *Le perforatrici a percussione meccanica* (*L'Ingegneria civile*, ecc., Torino 1875). — G. Sacheri, *Sul più economico impiego della forza motrice servendosi d'aria compressa a deboli pressioni* (*L'Ingegneria civile*, ecc., Torino 1875). — Karmasch und Heeren's, *Technisches Wörterbuch.* Prag 1877. — Spons, *Dictionary of Engineering.* — Laboulaye, *Dictionnaire des arts et manufactures.*

Ing. Giuseppe Pastore.

MACCHINE DA CALCOLARE. — Franc. *Machines à calculer.* Ted. *Rechenmaschinen.* Inglese *Instruments for calculating.* Spagnuolo *Màquinas para executar càlculo.*

I calcoli numerici, che costituiscono la più comune e la più indispensabile applicazione delle scienze esatte, sono tuttavia la più faticosa, malgrado i notevoli progressi che ne hanno man mano semplificati i procedimenti. Essi si riducono, nel maggior numero dei casi, ad una ripetizione puramente materiale di poche operazioni elementari, le quali richiedono uno sforzo continuo di attenzione e di memoria che affatica ben presto il calcolatore. La facilità di commettere errori, e la ripugnanza della mente umana ad assoggettarsi per lungo tempo ad un così penoso lavorìo mentale, in cui le migliori facoltà dell'intelligenza riescono perfettamente inutili, e soventi anzi dannose, fecero pensare ai mezzi di rendere meno grave l'esecuzione dei calcoli.

Alcuni degli artifizi proposti a tale intento, come i *prontuari di conti fatti*, le *tavole numeriche*, e gli *apparecchi aritmotecnici*, appartengono allo stesso procedimento numerico, di cui rendono più facile e spedita l'applicazione permettendo di ottenere direttamente i risultati parziali o totali di alcune operazioni. Però gli studii non si limitarono a questo punto; ma si tentò eziandio di trasportare in altri campi, d'indole affatto diversa, l'effettuazione delle regole dell'aritmetica. Ne nacquero così due nuovi procedimenti di calcolo, cioè il procedimento meccanico ed il procedimento grafico. Nel primo le operazioni aritmetiche si eseguiscono automaticamente col mezzo di apparecchi speciali, che chiameremo *macchine automatiche;* nel secondo invece esse si eseguiscono o mediante costruzioni geometriche nel *calcolo grafico*, ovvero mediante apparecchi fondati sul calcolo grafico, chiamati *aritmografi.*

Oggidì adunque i calcoli si possono eseguire con tre procedimenti fondati sopra considerazioni diversissime, cioè numericamente, meccanicamente e graficamente. Ognuno di questi procedimenti formerà oggetto del nostro studio, per la parte almeno che si riferisce alle macchine ed agli apparecchi da calcolare. Divideremo perciò il presente articolo in tre parti, che si possono suddividere a questo modo:

Apparecchi aritmotecnici	Abbaco. Bastoncini di Napier. Apparecchi rabdologici.
Macchine automatiche	Macchine addizionatrici. Macchine che eseguiscono le varie operazioni della aritmetica. Macchine algebriche.
Aritmografi	Compasso di proporzione. Regoli ed apparecchi a divisione logaritmica. Planimetri.

PARTE PRIMA.

APPARECCHI ARITMOTECNICI.

Abbaco.

L'*aritmotecnica*, o la tecnologia dei numeri, è antica quanto il bisogno di misurare le quantità. Assai prima di concepire le idee astratte, e di immaginare i metodi teorici di calcolo, le società primitive hanno usato i procedimenti pratici, che poi più tardi servirono a dirigere i ragionamenti, ed a stabilire le regole dell'aritmetica.

I primi uomini hanno contato sulle dita, poi con pietre o conchiglie. Questo metodo primitivo, ancora il solo in uso oggidì presso molti popoli selvaggi, diede origine a varii apparecchi, i quali, successivamente modificati e perfezionati dai varii popoli, pervennero fino a noi. Lo *abax* dei greci, l'*abacus* dei romani, il *souan-pan* dei cinesi, lo *stchoté* dei russi, i *quipos* o corde a nodi di cui gli abitanti del Perù si valsero per esprimere i numeri fino al VII secolo dell'êra volgare, le corone o *rosarii* di grani divisi per decine usati ancora attualmente dagli agrimensori, l'*abbaco* quale serve oggidì nell'insegnamento, possono tutti essere considerati come perfezionamenti del metodo primitivo delle pietre o dei gettoni.

Abax ed abacus.

Una tavola piana di legno, di forma rettangolare, e munita di un piccolo bordo alla sua periferia, serviva in Grecia ed in Roma sia per scrivere come per calcolare. Nel primo caso essa si cospergeva uniformemente di fina polvere, e sopra di questa si tracciavano, mediante uno stilo metallico, i caratteri o le figure geometriche. Per calcolare si usavano delle piccole selci, fave, monete o gettoni, i quali, disposti in file parallele sulla tavola stessa, rappresentavano i diversi ordini di unità; i calcoli si eseguivano spostando un numero conveniente di gettoni dall'una all'altra parte della tavola. Questa tavola, chiamata *abax* in greco, ed *abacus* in latino, non è altro che il *pulvis eruditus*, o la *mensa pythagorica* dei classici autori.

I romani, oltre alle tavole di cui abbiamo parlato, servivansi, ancora sotto il nome di *abacus*, di uno strumento analogo all'abbaco moderno, cioè formato da aste metalliche che portavano delle piccole sfere mobili; il numero delle sfere contenute nelle varie aste era diverso, allo scopo di permettere i calcoli di certe frazioni non decimali di pesi e di misure. Questo *abacus* si trova descritto, dietro qualche antico monumento, da Fulvius Ursinus e Giaconus; siccome però il suo uso riesciva alquanto complicato, prevalse il metodo di contare coi gettoni.

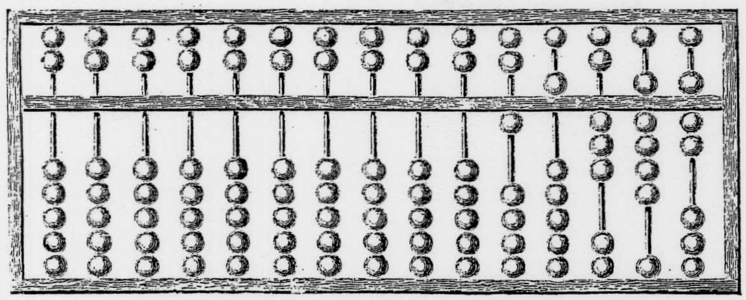


Fig. 638.

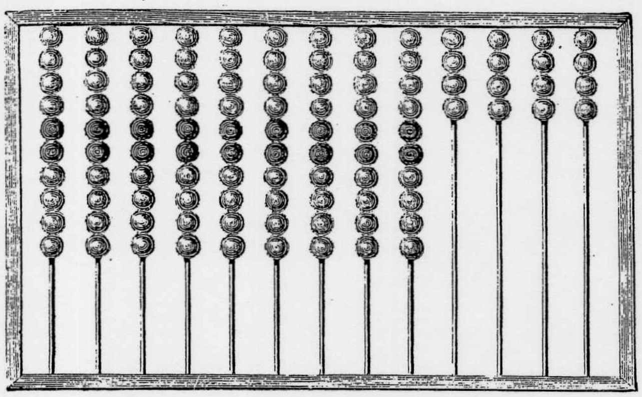


Fig. 639.

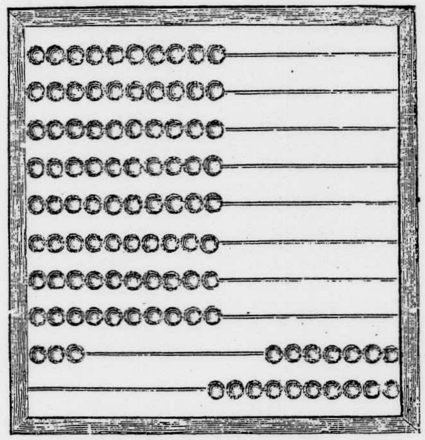


Fig. 640.

Souan-pan.

Il *souan-pan* (fig. 638) era conosciuto in Cina fin dalla più remota antichità. Esso è formato da un'intelajatura rettangolare di legno, alla quale sono fissate parecchie aste metalliche parallele che portano delle piccole sfere mobili di legno o di avorio. Una traversa longitudinale divide la lunghezza di queste aste in due parti diseguali; la minore contiene 2 pallottole, la maggiore 5. Ciascuna delle piccole sfere contenute nella parte maggiore vale 1, ognuna di quelle contenute nella parte minore vale 5; ordinariamente queste ultime sono distinte dalle altre per il colore o la grossezza. Partendo dalla destra le cifre della prima asta rappresentano le unità, quelle della seconda le decine, quelle della terza le centinaja, e così via.

Questo apparecchio, che deve essere tenuto orizzontale o quasi, si porta allo zero disponendo le sferette contro i lati anteriore e posteriore della intelajatura. Per rappresentare un numero, le sfere si fanno scorrere contro la traversa intermedia; così nella figura è rappresentato il numero 15397. Rigorosamente parlando basterebbero 4 sole sfere nella parte maggiore delle singole aste, ed 1 nella parte minore; esistono appunto degli apparecchi più semplici, destinati all'uso comune, costituiti in tal modo.

Nella Cina e nel Thibet, ove il calcolo decimale (non metrico però) è il solo conosciuto, questo strumento è usitatissimo, ed i commercianti di quei paesi eseguiscono col *souan-pan*, che portano costantemente appeso alla loro cintura, tutte le operazioni dell'aritmetica con una prestezza e precisione meravigliose. Essi fanno l'addizione e la sottrazione incominciando dalle cifre di ordine più elevato; per la moltiplicazione e la divisione seguono l'ordine adottato in Europa.

Stchoté.

La *stchoté* (fig. 639), usato ancora oggidì in Russia, è, come il *souan-pan*, formato da un'intelajatura rettangolare, che sostiene tante aste parallele lungo le quali possono scorrere delle piccole sfere. Ciascun'asta rappresenta un ordine diverso di unità, però tutte le sfere della stessa asta hanno il medesimo valore. Le 4 prime aste a destra contengono 4 sole sfere, le altre ne contengono 10; fra queste le due sfere mediane sono tinte in nero perchè riesca più facile il conteggio.

La figura rappresenta lo strumento pronto per essere adoperato, cioè con tutte le aste a zero; per rappresentare i numeri, le sfere si portano contro il lato anteriore dell'intelajatura.

Abbaco delle scuole.

Abbaco semplice. — L'abbaco o pallottoliere (francese *abaque*, *boulier compteur;* ted. *Rechenbrett;* inglese *abacus*) quale si usa oggidì, è una delle varietà dell'*abacus* dei romani, e serve a facilitare l'insegnamento della numerazione parlata, del sistema numerico decimale, e delle prime operazioni dell'aritmetica.

Esso può avere forme diverse. Ordinariamente è costituito (fig. 640) da un telajo rettangolare sostenuto verticalmente, in cui sono disposte 10 aste metalliche orizzontali ed equidistanti, che offrono una leggera curvatura in alto. In ciascuna di queste aste sono infilate 10 sferette di legno, le quali si possono far passare contro il lato destro o contro il lato sinistro del telajo.

Per l'insegnamento della numerazione parlata tutte le sfere delle varie aste hanno il medesimo valore. Il maestro conta ad alta voce 1, 2, 3,..., spingendo ad ogni nuova cifra una pallottola dell'asta inferiore verso la destra; giunto a 10, spiega che invece di dire 10 unità si può dire una decina. Continua a contare 11, 12, 13..., colle pallottole della seconda asta; arrivato per esempio a 17 egli indica agli allievi che 17 si compone di una decina e di 7 unità. Un numero qualunque minore di 100 essendo così materialmente espresso colle pallottole, riesce facile di fare intendere agli allievi quante unità e quante decine contenga; le decine sono indicate dal numero delle serie intiere di 10 pallottole che sono state spinte a destra. Infine egli fa vedere che 100 unità equivalgono a 10 decine.

Spiegato in seguito il concetto della numerazione decimale, assegna ciascun'asta dell'abbaco ad un ordine diverso di unità, cioè la più bassa alle unità semplici, la seconda alle decine, la terza alle centinaja, e così via.

Per rappresentare allora un numero qualunque con questo apparecchio, si fa passare a destra un numero di sfere uguale al numero delle unità di ciascun ordine.

Per l'insegnamento dell'addizione, scritto un certo numero sull'abbaco, si cercherà di scriverne un secondo di seguito al primo, cominciando l'operazione dalle unità semplici, e riportando le decine da un'asta alla precedente, precisamente come si dovrà poi fare nel procedimento scritto dell'addizione. Così suppongasi che al numero 354511 debbasi sommare il numero 498835. Si scrive anzitutto sull'abbaco uno dei numeri proposti, ad es. il 354511, spostando a destra una pallottola dell'asta inferiore, e rispettivamente 1, 5, 4, 5, 3 pallottole delle aste successive. Incominciando poscia dall'asta inferiore, si spostano a destra altre 5 pallottole, che con quella già esistente danno 6, numero delle unità nella somma. Nell'asta soprastante, decine, si sposteranno altre 3 pallottole, e si otterrà così il numero 4 delle decine nella somma. Nell'asta delle centinaja si dovrebbero portare a destra altre 8 pallottole; ma, come a sinistra non se ne hanno che 5, si spostano queste 5 ricordando che occorrerà aggiungerne altre 3. Spostate le 5 pallottole si osserva che la decina delle centinaja equivale all'unità delle migliaja, e quindi si riportano a sinistra tutte le 10 pallottole della terza asta, spostando a destra in loro vece una pallottola delle migliaja, che saranno così portate a 5. Quindi ritornando alle centinaja si spostano a destra le 3 che non si poterono aggiungere prima, e si ottiene il numero 3 delle centinaja nella somma. Analogamente si procede per tutte le altre cifre, sicchè in ultimo si avrà la somma 853346 dei due numeri proposti.

In modo simile si fa l'insegnamento della sottrazione.

Quando l'abbaco deve servire per rappresentare numeri con frazioni decimali, alcune delle aste inferiori sono destinate alla parte decimale, e sono separate dalle superiori da un certo intervallo.

Un altro semplicissimo apparecchio che serve, come il pallottoliere, all'insegnamento delle prime nozioni dell'aritmetica è rappresentato nella figura 641. Esso è formato da una cassettina di legno lunga m. 0.40, larga m. 0.30, ed alta m. 0.04, divisa in 10 scompartimenti uguali mediante assicelle disposte nel senso della sua lunghezza. Entro ciascun scompartimento può farsi scorrere un'assicella lunga poco più della metà degli scompartimenti stessi, sulla quale sono coloriti 10 piccoli circoli equidistanti fra di loro, destinati a rappresentare i numeri da 1 a 10. I circoli delle varie assicelle sono distinti con tinta differente, ed ognuna delle assicelle corrisponde ad un ordine diverso di unità. La cassetta e quindi i 10 scompartimenti sono coperti per metà della loro lunghezza, e 10 bottoncini, che attraversano il coperchio entro apposite fenditure, permettono d'estrarre più o meno le varie assicelle in modo da far apparire nella parte scoperta un numero qualsiasi avente non più di 10 cifre.

Benchè questo apparecchio non sia certamente da preferirsi al pallottoliere, tuttavia la semplicità di costruzione, e quindi il suo poco costo, possono talvolta consigliarne l'uso; eseguito in piccole dimensioni, potrebbe essere posto nelle mani di ciascun allievo, e rendere così simultaneo il lavoro di tutta la classe, e più divertente l'insegnamento (1).

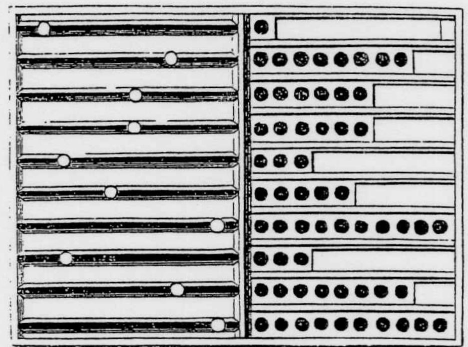


Fig. 641.

Abbaco frazioniere. — Un apparecchio pure generalmente usato nell'insegnamento elementare è il *frazioniere* (fig. 642). Esso serve per ben spiegare praticamente che cosa sono le frazioni, e consiste di un telajo

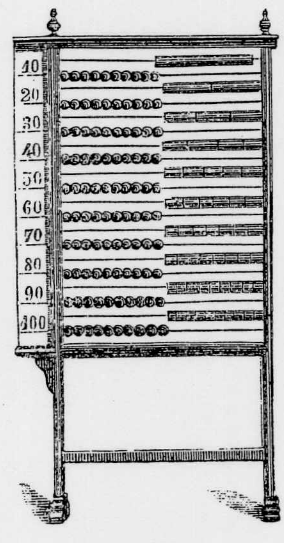


Fig. 642.

verticale, il quale sostiene orizzontalmente 10 aste metalliche. Ciascuna di queste porta infisso lungo il suo asse un cilindro mobile di legno. I dieci cilindri sono tutti di uguale lunghezza, ma il primo è intiero, il secondo è diviso in due parti uguali, il terzo in tre parti uguali, il quarto in quattro, e così via fino al decimo, che è diviso in 10 parti uguali. Talvolta il frazioniere è congiunto al pallottoliere come indica la figura.

(1) Questo apparecchio esiste nelle collezioni del R. Museo Industriale Italiano in Torino; esso è usato in molti paesi dell'Austria.

Abbaco composto. — Abbiamo parlato del pallottoliere semplice, quale è usato comunemente nelle scuole dell'infanzia; però furono proposte molte modificazioni allo scopo di perfezionarlo e di completarlo, rendendolo atto non solo all'insegnamento della numerazione e del calcolo orale, ma eziandio a quello della numerazione e del calcolo scritto.

In molti di questi pallottolieri, che possiamo dire *composti*, è aggiunto un sistema di cifre mobili e di tavole speciali. In alcuni poi le pallottole sono disposte secondo aste verticali, come nell'*Apparato didattico V. Carli* (fig. 643); in altri è aggiunto a destra un secondo telajo nel quale si prolungano le aste metalliche, ed ove trovansi altre pallottole destinate a segnare le decine; in altri posteriormente alle pallottole sono disposti dei fili verticali che servono ad indicare i diversi ordini di unità. In altri ancora, allo scopo di evitare la piccola

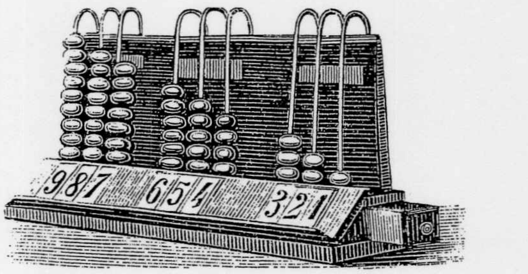


Fig. 643.

difficoltà di dover contare un numero troppo grande di pallottole, si è diviso, imitando il *souan-pan* cinese, l'abbaco in due parti; nell' una trovansi 2 pallottole bianche ciascuna delle quali vale 5, nell'altra 4 pallottole nere che valgono 1. L'abbaco proposto dal Rous, di cui parleremo in seguito trattando degli apparecchi rabdologici, appartiene a quest'ultima categoria.

Apparecchio di A. Barre. — All'Esposizione universale di Parigi del 1867 il signor Augusto Barre ha presentato un *quadrante contatore*, destinato specialmente a facilitare l'insegnamento del conteggio numerico e dell'addizione.

Questo apparecchio (fig. 644) è formato da una tastiera A a nove tasti, portata da due leve C girevoli su di un medesimo asse di rotazione. I nove tasti sono distinti rispettivamente coi numeri 1, 2, 3,.... 9. Essi si prolungano inferiormente con piccole aste parallelepipede di lunghezze diverse, disposte in modo che allorquando l'operatore preme col dito uno dei tasti, la tastiera A si abbassa, ed il tasto toccato prende una posizione tale da venire ad incontrare il piano inferiore D; abbandonato il tasto, la tastiera A ritorna da sè alla posizione primitiva in virtù di un contrappeso. L'asse di rotazione delle due leve C porta un tamburo, sul quale sono segnati ad uguali distanze i successivi numeri intieri 0, 1, 2, 3,..... fino ad un certo numero massimo più o meno grande a seconda delle dimensioni dell'apparecchio. Questo tamburo è munito d'una corona dentata su cui agisce un nottolino, mediante il quale la discesa della tastiera A produce la rotazione del tamburo, mentre nella salita ogni comunicazione di movimento fra le leve C ed il tamburo stesso è interrotta. La lunghezza poi dei varii tasti è tale che la corrispondente rotazione della tastiera, e quindi del tamburo è proporzionale al numero segnato sul tasto stesso; cosicchè, se il tamburo presenta all'indice la cifra 0, quando l'operatore preme ad es. il tasto 7, la cifra 7 del tamburo è portata in corrispondenza dell'indice. Se in seguito l'operatore spinge un secondo tasto, ad es. il 9, il tamburo avanza di altre 9 cifre e l'indice segna la somma $7 + 9 = 16$; così si può continuare ad aggiungere altri numeri, finchè non si supera il massimo numero scritto sul tamburo.

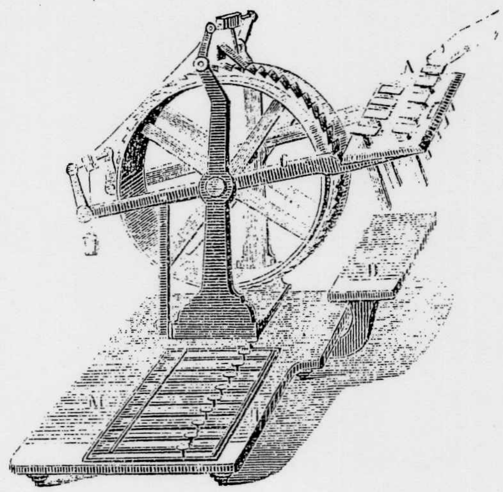


Fig. 644.

Nella base M dell'apparecchio è disposto un quadro N formato da 10 assicelle numerate, che possono farsi scorrere a mano entro apposite scanalature. Mercè questo quadro l'operatore può tener nota di un totale o di un altro numero qualsiasi che importi ricordare.

Questo apparecchio, che presenta qualche utilità per l'insegnamento, non può, per la sua azione limitata a piccoli numeri, applicarsi come una vera macchina calcolatrice.

Bastoncini di Napier.

L'idea di rendere mobili le colonne della tavola di moltiplicazione o di Pitagora, fondamento dei così detti *bastoncini* o *lamelle di Napier* (franc. *bâtons de Néper;* ted. *Nepperianische Rechenstäblein;* inglese *Napier's Bones*) e di tutti gli apparecchi rabdologici, è dovuta a Napier (1550-1617), l'illustre inventore dei logaritmi. Questo procedimento aritmotecnico, che, a dir vero, non costituisce se non una modificazione degli antichi metodi di moltiplicazione insegnati da Pietro Apiano (1495-1552) e da altri aritmetici del secolo XVI, trovasi descritto nella *Rabdologia* (ῥάβδος — asticella) pubblicata da Napier nel 1617 (1).

Ciascuna delle colonne della tavola pitagorica, coi numeri disposti come ora vedremo, ed applicata sopra di un cartoncino o sopra una sottile assicella di legno, costituisce uno dei bastoncini di Napier. La figura 645 rappresenta il bastoncino corrispondente all'ottava colonna della tavola di moltiplicazione. La sua faccia superiore è divisa in 9 caselle quadrate, ognuna delle quali alla sua volta è scomposta in 2 triangoli mediante la diagonale che parte dal vertice inferiore di sinistra. Nei 9 quadrati si trovano i 9 primi multipli di 8, scritti in modo che per ciascuno di essi la cifra delle unità cada

(1) *Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo; cum appendice de expeditissimo multiplicationis promptuario, quibus accessit et arithmeticae localis liber unus.* Edimburgi 1617.

nel triangolo di destra, e la cifra delle decine in quello di sinistra.

Dispongansi ora (fig. 646) uno accanto all' altro, ad esempio, 5 bastoncini che portino in capo le cifre 5, 9, 7, 8, 8. Sulla prima linea si leggerà allora il numero 59788, sulla seconda 119576 = 59788 × 2, sulla terza 179364 = 59788 × 3, sulla quarta 239152 = 59788 × 4, e così fino all'ultima linea in cui si leggerà il numero 538092 = 59788 × 9; *purchè si avverta di sommare mentalmente le cifre comprese fra le stesse diagonali, e, se questa somma contiene una decina, di aggiungerla alle cifre dell' ordine immediatamente superiore.* Un breve esercizio permette di soddisfare facilmente a questa condizione.

Avendo quindi un numero conveniente di bastoncini di Napier, alcuni corrispondenti allo 0, e gli altri ai numeri semplici 1, 2, 3,..... 9, si potrà rappresentare coi medesimi un numero qualunque, ed ottenere immediatamente i multipli semplici di questo numero. Tale proprietà permette di applicare i bastoncini rabdologici in

Fig. 645.

Fig. 646.

molti calcoli numerici, e la loro utilità è specialmente manifesta quando si tratti di moltiplicazioni, di divisioni o di estrazioni di radici con numeri composti di molte cifre.

Applicazione dei bastoncini alla moltiplicazione. — Debbasi ad es. eseguire il prodotto 59788 × 9734.

Disposti uno accanto all'altro i bastoncini che portano in alto le cifre 5, 9, 7, 8, 8 del primo dei fattori, ad es. (fig. 646), si applica alla loro sinistra un bastoncino delle unità.

Allora si possono leggere immediatamente i prodotti parziali corrispondenti alle cifre 4, 3, 7, 9 del moltiplicatore. Questi prodotti parziali si trascrivono disponendoli uno sotto all'altro come nell'operazione ordinaria, e si sommano:

```
   239152
  179364
 418516
538092
---------
581976392
```

Applicazione dei bastoncini alla divisione. — Si cerchi ad es. il quoziente 498537 : 6372.

Scritto il divisore coi 4 bastoncini corrispondenti ai numeri 6, 3, 7, 2 (fig. 647), si applica alla loro sinistra un bastoncino delle unità.

Si cerca poscia qual è il multiplo semplice del divisore 6372 che più si avvicina al primo dividendo parziale 49853.

```
498537 | 6372
44604  |------
------ | 78.23
 52497
 50976
 -----
  15210
  12744
  -----
   24660
   19116
   -----
    5544
```

Immediatamente si vede che è il 44604 = 6372 × 7; dunque 7 è la prima cifra del quoziente.

Si considera il secondo dividendo parziale 52497 e si cerca il multiplo di 6372 più prossimo al medesimo; tale multiplo in questo caso è 50976 = 6372 × 8. Dunque 8 sarà la seconda cifra del quoziente cercato.

Fig. 647.

Colla stessa facilità si può procedere alla ricerca delle altre cifre del quoziente.

Napier ha pure immaginato un altro apparecchio, il *promptuarium*, più complicato, ma che risolve completamente il problema generale della moltiplicazione.

L'ingegnoso e semplicissimo artificio ideato da Napier, accolto con grande favore al primo apparire, è pressochè dimenticato oggidì. Tale dimenticanza però non ci pare giustificata, poichè i bastoncini rabdologici, a fronte di pochi inconvenienti di cui ora parleremo, presentano sui procedimenti ordinarii dei vantaggi incontestabili quando si tratti di calcoli aritmetici con numeri di molte cifre; cioè risparmio di tempo, minore lavoro mentale, e minore facilità di commettere errori.

Gli inconvenienti principali che si lamentano nell'applicazione dei bastoncini di Napier sono tre:

1° La mobilità e l'indipendenza dei bastoncini, che possono facilmente smuoversi durante un'operazione;

2° La perdita di tempo che richiede la ricerca di un determinato bastoncino;

3° La difficoltà, sulle prime almeno, che presenta la lettura delle varie cifre dei prodotti.

Molti autori si proposero di rimediare a questi inconvenienti, e, pur mantenendo il concetto fondamentale del sistema, studiarono varie modificazioni. Però gli apparecchi che ne risultarono, dobbiamo dirlo immediatamente, non corrisposero fin qui allo scopo di rendere più facile l'applicazione del metodo neperiano, e ricevettero quindi pochissime applicazioni. Ci limiteremo perciò a pochi cenni intorno ai principali di questi apparecchi rabdologici.

Apparecchi rabdologici.

Fra gli autori che, con maggiori o minori modificazioni, applicarono l'idea di Napier, citiamo: Gaspare Schott (1668); l'orologiere Grillet (1673); Petit (1678); Leupold (1727); Michaël Poetius (1728); De Méan (1731); Roussain (1738); Prahl (1789); Gruson (1790); Jordans (1797); Hélie, Bardach (1839); Lapeyre (1840); Cadolini (1844); Benoit, il dottore Roth, Chauvin (1846); Barnett (1847); Dubois (1860); Benoist (1861 e 1862); Dunlup (1867); Genaille (1884); ecc.

Apparecchio di Schott.

La migliore modificazione dei bastoncini rabdologici, soventi riprodotta in seguito, è quella immaginata da Gasparo Schott, e pubblicata nel 1668 nelle sue opere postume. L'apparecchio di Schott era formato da una piccola cassetta, nella quale trovavansi, coi loro assi paralleli e nello stesso piano, parecchi cilindri di legno mobili attorno al proprio asse. Ciascuno di questi cilindri portava una colonna di zeri, ed una tavola di moltiplicazione completa, in cui, come nei bastoncini di Napier, le unità erano separate dalle decine col mezzo delle diagonali. Erano così ovviati gl'inconvenienti principali dei bastoncini, cioè la mobilità, e la perdita di tempo necessaria alla loro ricerca; però la difficoltà nella lettura dei varii prodotti non poteva che essere aumentata, in causa della distanza che necessariamente doveva risultarne fra i diversi numeri da leggersi simultaneamente.

Il *calculateur* presentato nel 1839 dall'Hélie all'Accademia delle Scienze di Parigi, è simile all'apparecchio di Schott; però il *Million de faits* (Parigi, 1842), che ne dà la descrizione e la figura, lo presenta come inventato dall'Hélie.

Anche l'apparecchio di Rous, di cui ora parleremo, riproduce la disposizione ideata da Schott.

Apparecchio di Rous.

Nel sistema proposto dal Rous per l'insegnamento dell'aritmetica (1), oltre a due grandi pallottolieri fissi di cui si vale il maestro per le dimostrazioni, ciascun allievo deve essere munito di un piccolo abbaco, mediante il quale può eseguire da sè le varie operazioni spiegate dall'insegnante.

L'*abaque portatif*, come chiama il Rous quest'ultimo apparecchio, è rappresentato dalla figura 649. Esso si compone di due intelajature C D ed A B, congiunte a cerniera in modo da potersi chiudere l'una sull'altra formando una piccola cassa.

La parte inferiore C D è un pallottoliere simile al *souan-pan* cinese, e serve per la numerazione, l'addizione, e la sottrazione. Ciascuna delle aste di questo pallottoliere è mobile sul proprio asse, e porta, all'estremità superiore, un piccolo cilindro sul cui contorno sono segnate le cifre 0, 1, 2,... 9. Facendo muovere i bottoni F, queste cifre appariscono successivamente alle finestrelle praticate nel lato superiore dell'intelajatura, cosicchè gli allievi possono essere esercitati non solo a rappresentare i numeri colle sfere dell'abbaco, ma eziandio a scriverle colle cifre dei cilindri.

(1) *Bulletin de la Société d'encouragement*, 1869, pag. 137.

La parte superiore A B dell'apparecchio serve per eseguire la moltiplicazione, la divisione e l'estrazione delle radici quadrata e cubica, secondo il sistema rabdologico. Essa contiene 8 piccoli cilindri che si possono far muovere attorno al proprio asse mediante i bottoncini G.

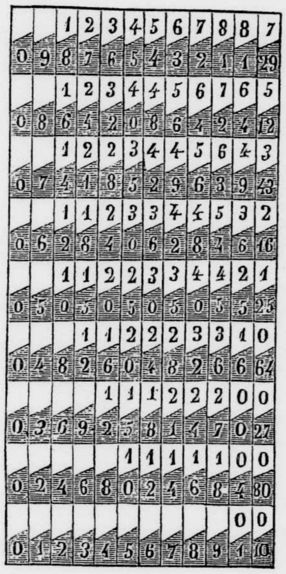


Fig. 648.

Ciascun cilindro porta le 12 colonne di cifre rappresentate nella figura 648. La prima colonna di sinistra non contiene che dei zeri; la seconda colonna, partendo dal basso, la serie dei 9 primi numeri intieri; la terza i multipli semplici di 2; e così fino alla decima colonna che contiene i multipli di 9. Le ultime due colonne infine portano i quadrati ed i cubi dei numeri intieri 1, 2, 3,... 9. Tutti questi numeri sono scritti col sistema neperiano, cioè colla cifra delle decine separata da quella delle unità mediante un tratto obliquo. Un cartone rettangolare, fissato sul contorno dell'intelajatura A B, ricopre i varii cilindri, presentando di fronte a ciascuno di essi una scanalatura longitudinale a cui apparisce una sola delle 12 colonne di cifre di cui sono muniti. I tratti orizzontali che separano i multipli scritti nelle colonne, ed i tratti obliqui che distinguono le decine dalle unità di ciascun multiplo, si prolungano sul cartone, cosicchè ne risultano tanti rombi, i quali sono distinti in colonne verticali per mezzo di una diversa colorazione. A destra ed a sinistra sono segnati, fra le successive orizzontali e partendo dal basso, i numeri 1, 2, 3,... 9, che denotano l'ordine dei varii multipli. La diversa colorazione che distingue le varie colonne di rombi, ha per iscopo di facilitare la lettura dei prodotti, poichè *le cifre contenute in uno stesso rombo devono essere sommate.*

Avendo spiegato precedentemente l'uso dei bastoncini di Napier, il modo di valersi di questo apparecchio non presenta alcuna difficoltà. Dato un numero qualunque, ad es. 412, di cui si vogliono ottenere i multipli semplici, basterà scrivere questo numero manovrando i bottoncini G in modo da far comparire successivamente ciascuna delle sue cifre 2, 1, 4 nella linea inferiore (fig. 649). I multipli semplici di questo numero si leggeranno nelle linee soprastanti, ricordando la regola di sommare le cifre contenute nel medesimo rombo; la linea orizzontale 7, ad esempio, ci dà immediatamente il prodotto $412 \times 7 = 2884$.

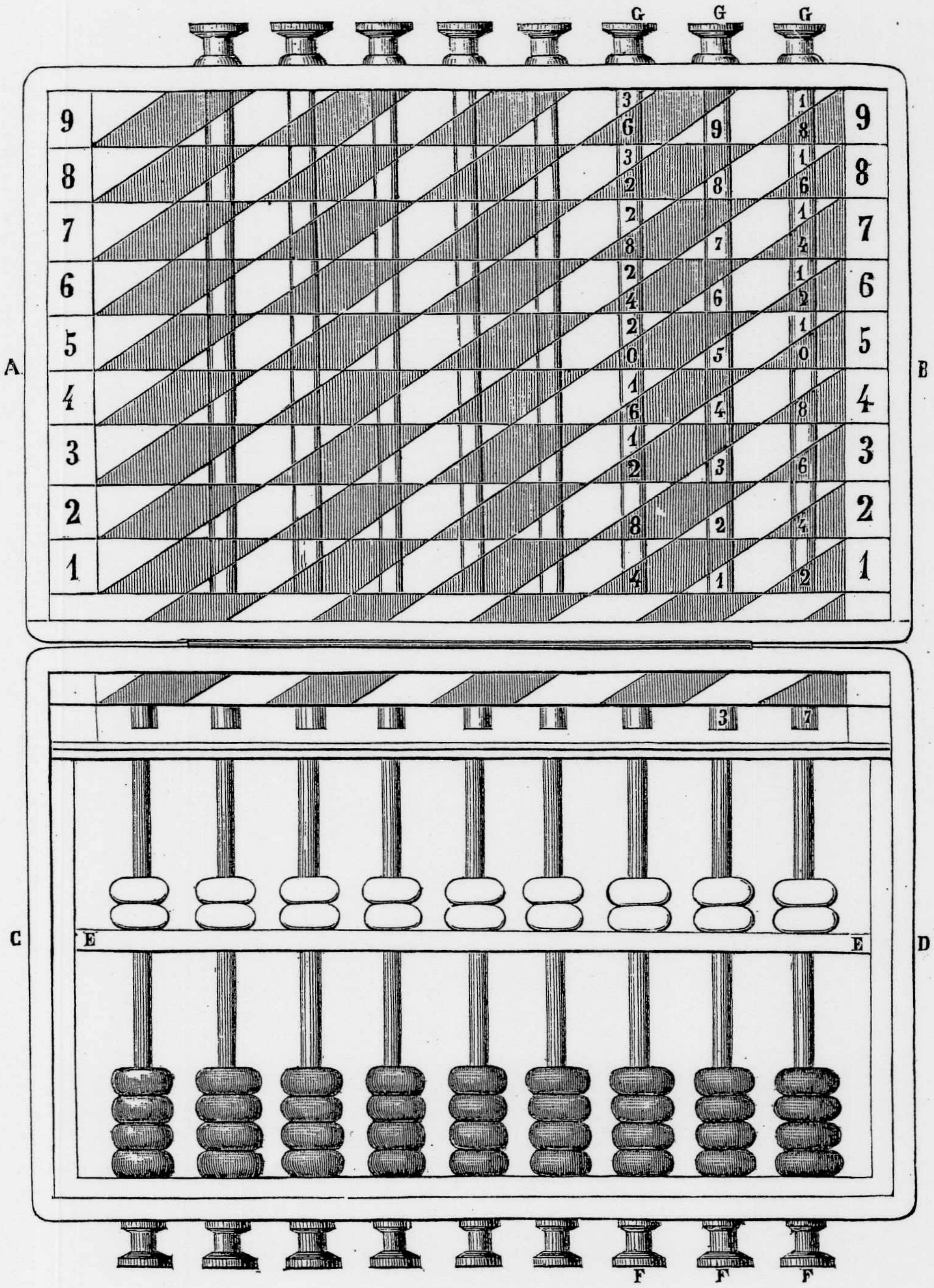


Fig. 649.

Apparecchi di Benoist e di Dubois.

Il Benoist (1) si preoccupò specialmente della direzione inclinata che hanno nei bastoncini di Napier i numeri da sommarsi mentalmente per ottenere le cifre successive dei multipli che si cercano, per cui è necessaria una certa pratica per abituarsi a tale posizione di cifre inusitata nella scrittura aritmetica.

Egli perciò ha modificata la scrittura dei bastoncini rabdologici, e ne ha inclinata la loro posizione, come è indicato nella figura 650. Invece delle caselle quadrate o rettangolari, si ottengono così delle caselle aventi la forma di un parallelogrammo, che rimane scomposto in due triangoli rettangoli dalla diagonale che va da sinistra a destra. In ciascuna casella la cifra delle unità è scritta sul mezzo del lato inferiore, la cifra delle decine sul mezzo del lato superiore. In tal modo i numeri da sommarsi essendo disposti direttamente l'uno al disopra dell'altro, la lettura dei multipli semplici è realmente facilitata.

I numeri 0123, 1234, 2345, ecc. scritti in capo ai bastoncini hanno per iscopo di facilitare la ricerca di una determinata colonna della tavola pitagorica. Essi indi-

(1) *Bulletin de la Société d'encouragement*, 1869, pag. 3.

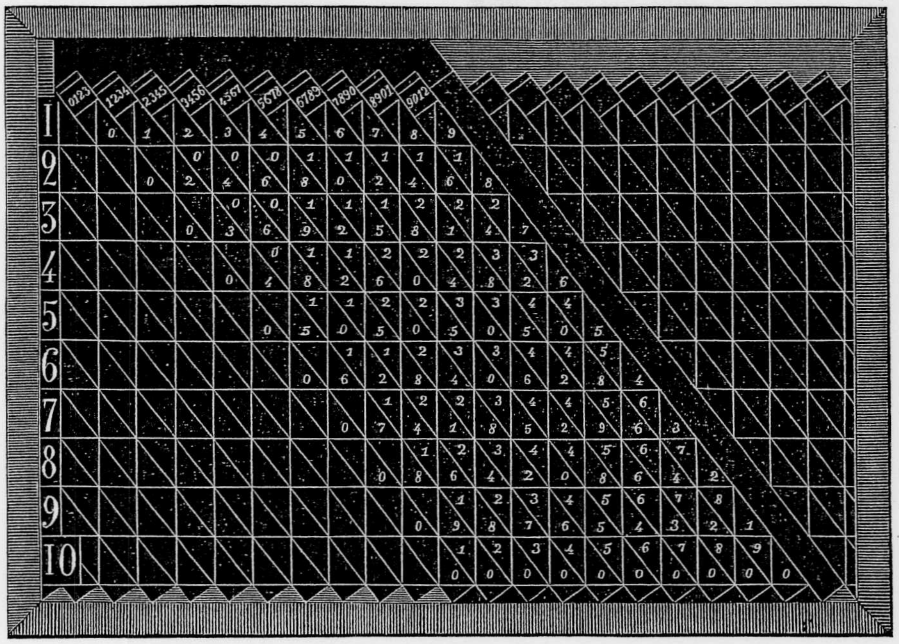


Fig. 650.

cano le varie colonne che si trovano sulle quattro faccie di ciascun bastoncino. Così, ad es., il numero 5678 che si trova sul 6° bastoncino denota che i multipli di 6 sono inscritti sulla sua seconda faccia, la quale porterà in capo il numero 6785; che i multipli di 7 si trovano sulla terza faccia, in capo alla quale si leggerà 7856, e così via.

Un'altra modificazione nella scrittura dei bastoncini di Napier è stata applicata dal Dubois nel suo *aritmographe polycrome* (1). In questo apparecchio le decine dei varii multipli si distinguono dalle unità per la diversa colorazione; però le cifre da sommarsi mentalmente, cioè le decine di ciascun bastoncino e le unità del bastoncino successivo di sinistra, hanno la medesima tinta.

PARTE SECONDA

MACCHINE AUTOMATICHE.

Lo scopo delle macchine automatiche è di sostituire con movimenti meccanici il lavoro d'intelligenza e di memoria, che deve fare il calcolatore nell'eseguire le varie operazioni dell'aritmetica. La risoluzione di questo curioso ed arduo problema, proposto per la prima volta da Pascal nel 1642, fu tentata da Pascal stesso, ed in seguito da moltissimi scienziati ed uomini pratici, che ne sentirono tutta l'importanza. Disgraziatamente però, mentre da una parte si dimostra la possibilità teorica della sua risoluzione, s'incontrano all'atto pratico tali difficoltà, che ben pochi riescirono, anche dopo straordinarie fatiche e spese, a costrurre apparecchi soddisfacenti. Oggidì, in virtù degli immensi progressi compiuti dalla Cinematica e dalla Meccanica pratica, questo problema presenta alcune soluzioni abbastanza interessanti, e tali da far sperare non lontano il giorno in cui queste macchine raccolgano i requisiti necessarii per una larga applicazione pratica, cioè costo moderato, estensione sufficiente, facile e sicuro maneggio.

Divideremo le macchine automatiche in tre classi:

Macchine addizionatrici, le quali sono destinate ad eseguire o la sola addizione, o l'addizione e la sottrazione;

Macchine che eseguiscono le varie operazioni dell'aritmetica, cioè le quattro prime operazioni, o queste operazioni più l'estrazione delle radici;

Macchine algebriche, le quali servono al calcolo di tavole numeriche speciali, od alla risoluzione di equazioni.

MACCHINE ADDIZIONATRICI.

A questa prima classe appartengono, oltre alla famosa *macchina aritmetica di Pascal* (la prima macchina automatica che sia stata immaginata e costruita), gli apparecchi dovuti a Sir Samuele Moreland (1673), a Claudio Perrault architetto del Louvre (1699), al veneto matematico Poleni (1709), a Case (1720), all'orologiere Lepine (1725), a Giacomo Leupold (1727), ad Hillerin de Boissendeau (1730), a Gersten (1735), a Pereire (1750), a lord Mahon di Stanhope (1776), a Matthieu Hahn (1777), al capitano Müller (1784), ad Abraham Stern (1814), a Lagrons (1838), al dottore Roth (1843), all'orologiere Oprandino Musina di Mondovì (1867), ecc., la maggior parte dei quali però, come la macchina di Pascal, rispondono assai imperfettamente allo scopo. Noi ci occuperemo specialmente dell'*addizionatore* Roth, il quale, benchè meno usato oggidì, tuttavia risolve vittoriosamente tutte le gravi difficoltà pratiche che s'incontrano nella costruzione di simili apparecchi, e rappresenta una macchina addizionatrice di azione assolutamente regolare, esatta, e di uso abbastanza facile.

Esaminiamo anzitutto le condizioni generali del problema che si tratta di risolvere.

Dati due numeri qualunque, la loro somma o la loro differenza si ottiene addizionando o sottraendo successivamente, incominciando dalla destra, le cifre dei diversi ordini di unità. Se si tratta ad es. dei due numeri 746 e 122, le varie operazioni semplici da eseguirsi per sommarli o per sottrarli sono le seguenti:

7	4	6	+
1	2	2	
7 + 1	4 + 2	6 + 2	
8	6	8	

7	4	6	—
1	2	2	
7 — 1	4 — 2	6 — 2	
6	2	4	

(1) *Compt. rend. des séances de l'Acad. des Sciences*, vol. 53, pag. 618.

L'esempio considerato corrisponde al caso più semplice che può presentarsi in pratica, poichè nella somma l'addizione delle cifre dei varii ordini è minore di 9, e nella differenza i minuendi di tutte le sottrazioni parziali sono maggiori dei sottraendi. In generale invece succederà che l'addizione delle cifre di alcuno dei varii ordini supera 9, ed allora è necessario di eseguire il *riporto* della decina alla cifra od alle cifre degli ordini superiori. Così nella differenza succede frequentemente che alcuna delle sottrazioni parziali non si può eseguire direttamente, cosicchè è d'uopo di fare la *ritenuta* dalla cifra o dalle cifre degli ordini superiori.

Ciò posto, immaginiamo di avere un piccolo quadrante circolare girevole sul proprio asse, il quale porti, segnati a distanze uguali, i numeri 0, 1, 2, ... 9; un indice fisso, od una finestrella praticata in una lastra fissa che ricopra tale quadrante, permetteranno di individuare una qualunque di queste cifre. Supponiamo che questo quadrante presenti all'indice od alla finestrella la cifra 0; allora imprimendo al medesimo, in senso contrario a quello secondo cui crescono le cifre 0, 1, 2, ... 9, una rotazione di 36°, cioè di $\frac{1}{10}$ di giro, egli è chiaro che lo zero sarà sostituito dalla cifra 1. Se l'angolo fatto descrivere al quadrante corrisponde invece a $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, ... $\frac{9}{10}$ dell'intera rivoluzione, lo zero sarà sostituito dai numeri 2, 3,..... 9. Fatta così apparire alla finestretta una cifra qualunque, ad es. 6, se facciamo avanzare il quadrante di altri $\frac{2}{10}$ di giro ad es., sempre nello stesso verso, si otterrà la somma $6 + 2 = 8$; se gli ultimi $\frac{2}{10}$ di rivoluzione hanno luogo in verso contrario si otterrà la differenza $6 - 2 = 4$.

Ecco uno degli elementi della nostra macchina addizionatrice. Immaginiamo ora che parecchi quadranti, identici a quello ora descritto, siano disposti uno accanto all'altro nello stesso piano e secondo una linea retta; il primo quadrante di destra sarà assegnato alle unità semplici, il successivo alle decine, il terzo alle centinaja, e così via. Questo apparecchio ci permetterà evidentemente di ottenere la somma o la differenza di due numeri, eseguendo successivamente le varie addizioni o sottrazioni parziali sulle cifre dei diversi ordini di unità, e l'operazione si potrà anche continuare sommando o sottraendo altri numeri, finchè non è necessario qualche riporto o qualche ritenuta.

La difficoltà incomincia a questo punto, poichè tali riporti o ritenute dovranno essere eseguiti automaticamente dalla macchina, senza che l'operatore debba per nulla preoccuparsi, nè dell'istante, nè della cifra su cui cadono. Egli è chiaro che una macchina da calcolare la quale richiedesse l'intervento speciale dell'operatore per eseguire i riporti o le ritenute, risponderebbe assai imperfettamente allo scopo. I diversi quadranti, che fin qui abbiamo supposto indipendenti fra di loro, dovranno perciò essere collegati da uno speciale meccanismo, così disposto che *allorquando uno qualunque dei quadranti, dopo di aver fatto un giro completo, presenta di nuovo lo zero all'indice od alla finestrella, il quadrante vicino di sinistra deve avanzare di una cifra nello stesso verso del primo.*

Il *meccanismo dei riporti* è stato sempre la parte più difficile a stabilirsi in modo da ottenere un'azione semplice e sicura; esso fu lo scoglio incontrato da Pascal nella sua *macchina aritmetica*, e da quasi tutti quelli che tentarono la risoluzione pratica del problema della calcolazione meccanica. Sempre considerando la questione dal punto di vista generale, cioè senza fermarci, per ora, ad alcuna delle disposizioni cinematiche proposte, gioverà fermarci un istante per stabilire una condizione essenzialissima a cui deve soddisfare tale meccanismo.

Suppongasi, per fare un caso limite, che ad un numero formato da una serie di 9, ad es. al numero 99999, si debba aggiungere 1 unità. Allora il riporto si estende non solo al 9 che precede il primo, ma eziandio a tutti gli altri, poichè coll'aggiunta di questa sola unità il numero precedente 99999 deve cambiarsi in 100.000.

$$\begin{array}{r} 99999 + \\ 1 \\ \hline 100000 \end{array}$$

Ora nella macchina addizionatrice di cui fin qui abbiamo tenuto parola, supposto che gli indici o le finestrelle segnino il numero 99999, l'aggiunta di 1 unità si ottiene facendo avanzare il primo quadrante di destra di $\frac{1}{10}$ dell'intera rivoluzione; questo solo spostamento del primo quadrante deve per conseguenza produrre lo spostamento dei 5 successivi di sinistra, sì che il numero 100000 apparisca agli indici od alle finestrelle.

Or bene il meccanismo dei riporti può effettuare questi varii spostamenti in due maniere differenti che importa ben distinguere: o tutti i quadranti su cui si estende un riporto camminano contemporaneamente, come più ruote dentate consecutive formanti ingranaggio; oppure ciascun quadrante non cammina che allorquando il precedente ha compiuto il suo movimento.

Il primo modo di trasmissione, che possiamo dire *simultanea*, è impiegato nei contatori comuni, formati, come è noto, da una serie di quadranti a 10 denti, ognuno dei quali dopo un giro intiero fa avanzare di un dente il quadrante successivo di sinistra. Ma vi ha una difficoltà pratica, sensibile specialmente nel nostro caso ove si tratta di meccanismi necessariamente delicati. Egli è chiaro che colla trasmissione *simultanea*, negli istanti in cui un riporto si deve estendere a più cifre, si svilupperà un attrito e quindi una resistenza al moto del primo quadrante notevolmente maggiore di quella che si presenta nell'andamento normale dell'apparecchio. Mentre adunque il meccanismo corre facile pericolo di guasti, l'operatore, che in quasi tutte queste macchine deve esercitare la forza motrice necessaria, si affatica ben presto. Di più tale resistenza cresce così rapidamente al crescere del numero dei quadranti che devono avanzare ad un tempo, da rendere affatto irregolare, od anche da impedire assolutamente, l'azione dell'apparecchio quando esso debba contenere più di 4 o 5 quadranti.

Tutti questi inconvenienti spariscono colla trasmissione *successiva*, nel qual caso, qualunque sia il numero dei quadranti su cui si deve estendere un riporto, la resistenza da vincersi si mantiene costante.

La macchina di Pascal, e quasi tutte quelle ideate in seguito fino al nostro secolo, presentano il gravissimo difetto della trasmissione simultanea dei riporti, cosicchè la loro azione riesce limitata ed irregolare. La necessità di rendere successiva tale trasmissione fu posta in evidenza ed applicata con successo dal Thomas nel suo *aritmometro*, e dal Roth nel suo *addizionatore* (1).

(1) Il dottore ROTH esprime in modo esatto ed evidente la differenza fra il suo meccanismo dei riporti e quello impiegato da Pascal dicendo: *La machine de Pascal fait un* FEU DE BATAILLON, *et la mienne un* FEU DE FILE (*Bulletin de la Société d'encouragement*, 1843, pag. 411).

La macchina addizionatrice che abbiamo considerata fin qui, composta di parecchi quadranti numerati posti nel medesimo piano, rappresenta la disposizione comunemente adottata. Talvolta i quadranti, invece di una sola serie di numeri 0, 1, 2... 9, ne portano 2 (Roth), od anche l'intiera serie dei numeri da 1 a 100 (Lagrons); in questi casi la rotazione corrispondente all'avanzamento di una cifra sarà $\frac{1}{20}$ od $\frac{1}{100}$ dell'intiera rivoluzione. Per la sottrazione abbiamo detto che il movimento dei quadranti deve aver luogo in verso contrario a quello corrispondente all'addizione. In alcuni apparecchi invece, come in quello di Roth, la sottrazione si ottiene mantenendo tuttavia costante il verso del moto; ma in questo caso ciascuno dei quadranti porta due serie concentriche di numeri, cioè la serie diretta 0, 1, 2,... 9, e la serie inversa 9, 8,... 1, 0, disposte in modo che la somma delle cifre corrispondenti sia costantemente eguale a 9. In questo caso a ciascun quadrante devono corrispondere 2 finestrelle, l'una per l'addizione e l'altra per la sottrazione. In altri apparecchi ancora i quadranti numerati sono sostituiti da dischi numerati girevoli sopra di un asse comune (Pascal, Pereire, Oprandino Musina), od anche da piccoli regoli numerati, disposti parallelamente e dotati di moto progressivo (Perrault).

Macchina aritmetica di Pascal.

Biagio Pascal, sommo filosofo e geometra, nato a Clermont in Alvernia (Francia) il 19 giugno 1623, inventò e fece costruire dal 1642 al 1645, a 19 anni di età, la prima macchina automatica che si conosca. Questa macchina, da lui denominata *macchina aritmetica*, fu oggetto di ammirazione presso i suoi contemporanei, ed ottenne nel 1649 un brevetto dal Re di Francia; oggidì trovasi al Conservatorio delle arti e mestieri di Parigi.

Essa in realtà non serve che per l'addizione delle antiche monete francesi (lire, soldi e denari), e non è che mediante un artifizio che si può impiegare per la sottrazione delle stesse quantità. Entro una cassetta metallica, lunga m. 0.36, larga m. 0.13, ed alta m. 0.08, è racchiuso tutto il meccanismo, formato da una serie di cilindri girevoli attorno al loro asse, i quali portano sulla superficie convessa le cifre 0, 1, 2, . . . 9; queste cifre appariscono una ad una a tante finestrelle del coperchio. I varii cilindri sono destinati a rappresentare i diversi ordini di unità, e comunicano fra di loro mercè organi speciali complicatissimi, chiamati da Pascal *sautoirs*, per modo che quando uno qualunque dei cilindri ha fatto una rotazione completa, ossia ha contato dallo 0 fino a 9, il cilindro vicino di sinistra avanza di una cifra, cioè eseguisce il riporto registrando la decina del cilindro precedente. Questa parte del meccanismo destinata ai riporti, come già abbiamo avvertito, è disposta in modo affatto vizioso, poichè la trasmissione dei riporti ai successivi cilindri si fa in modo simultaneo. L'imperfetta esecuzione poi dei suoi ingranaggi a fusi, la lentezza e la difficoltà del suo cammino, non permettono di contare sulla sua esattezza. Essa fu ciò non di meno il frutto di lunghe ricerche, e più di 50 tentativi di congegni diversamente costituiti condussero Pascal a spese considerevoli. Alcune disposizioni di questa macchina sono tuttavia assai bene immaginate e furono soventi riprodotte in seguito (1).

Addizionatore di Roth.

Descrizione dell'apparecchio. — L'addizionatore costrutto dal dottore Roth è rappresentato dalle figure seguenti:

Fig. 651. Projezione orizzontale dell'apparecchio ($^1/_2$ del vero);

Fig. 652. Quadrante dentato (al vero);

Fig. 653. Projezione orizzontale del meccanismo, supposta tolta la lastra superiore (al vero).

Esso è costituito da 8 quadranti dentati A (fig. 652) girevoli attorno ad assi equidistanti, posti nello stesso piano, ed impiantati su di una lastra rettangolare B B (fig. 653), che forma la parte inferiore dell'apparecchio. Ognuno dei quadranti A porta alla sua periferia 20 piccoli denti trapezii uniformemente distribuiti, e sulla sua faccia superiore (fig. 652), in corrispondenza dei 20 vani che ne risultano, sono segnate 20 cifre che formano due serie dallo 0 al 9 crescenti da sinistra a destra. Tutti questi quadranti A sono ricoperti da una seconda lastra metallica rettangolare L L (fig. 651), disposta parallelamente alla precedente B B, a cui è collegata da spranghette. Le due lastre parallele superiore ed inferiore e le spranghette di collegamento formano come l'intelajatura di tutto il meccanismo, che è fissato in una cassetta rettangolare di legno destinata a proteggerlo.

Nella lastra superiore L L sono praticate 8 scanalature semicircolari a, ed altrettante finestrelle F.

Alle scanalature a appariscono i denti dei quadranti A. Il lembo esterno di esse è diviso in 10 parti eguali, e tra l'una e l'altra delle divisioni sono segnati i numeri 0, 1, 2, ... 9, nello stesso ordine di quelli scritti sui quadranti, cioè crescenti da sinistra a destra.

Alle finestrelle F appariscono una ad una le cifre dei quadranti A; le due prime finestrelle di destra sono ordinariamente destinate alla frazione decimale dei numeri da inscriversi, le 6 di sinistra alla parte intera dei numeri stessi.

Si supponga ora che una delle finestrelle F presenti la cifra 0. Per far apparire alla medesima un'altra cifra qualunque, ad es. la cifra 5, s'introduce la punta di un apposito stiletto, di cui è munito l'apparecchio, nel vano dei denti a cui sul lembo della scanalatura a corrisponde la cifra 5; mercè questo stiletto si imprime una rotazione da destra a sinistra al quadrante, finchè l'estremo della scanalatura ne arresti il movimento, cioè finchè il vano precedente sia portato in corrispondenza dello 0 del lembo. In questo modo si vedranno successivamente passare alla finestrella F le cifre 1, 2, 3 ..... fino alla 5, che si ferma.

Il moto dei quadranti A non può aver luogo che nel verso indicato, da destra a sinistra; una piccola molla m (fig. 653), il cui estremo libero penetra negli intervalli dei denti successivi, impedisce la rotazione contraria, producendo al tempo stesso una breve fermata al passaggio di ciascuna cifra alla finestrella F.

Quello che si è detto per uno dei quadranti A vale per tutti gli altri, e quindi si potrà rappresentare alle finestrelle F un numero qualsiasi, intero o decimale, con meno di 9 cifre significative, scrivendone successivamente le varie cifre partendo da destra.

Meccanismo dei riporti. — Il meccanismo dei riporti applicato dal Roth soddisfa alla condizione importantissima della trasmissione successiva.

(1) Il disegno e la descrizione completa della *macchina aritmetica* di Pascal trovansi nell'*Encyclopédie*, publiée par MM. DIDEROT et D'ALEMBERT, all'art. *Arithmétique*. — Vedansi pure: *Œuvres complètes de Pascal*, edizione DE LA HAYE, 1779, vol. 4°, pag. 137; *Recueil des machines de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. 4°, pag. 137.

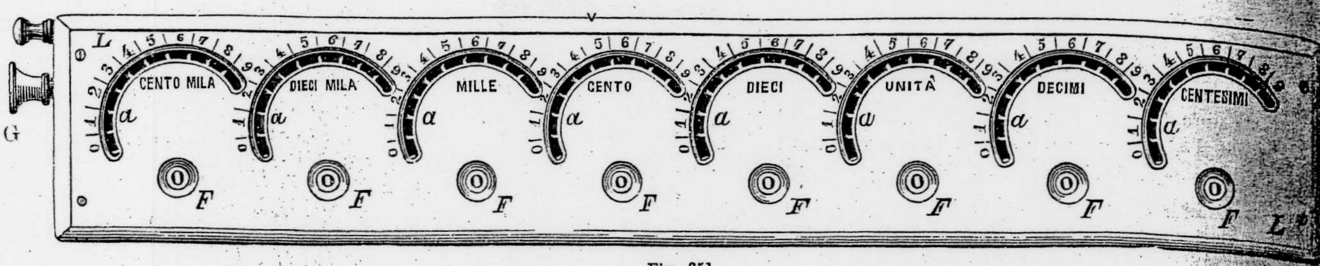


Fig. 651.

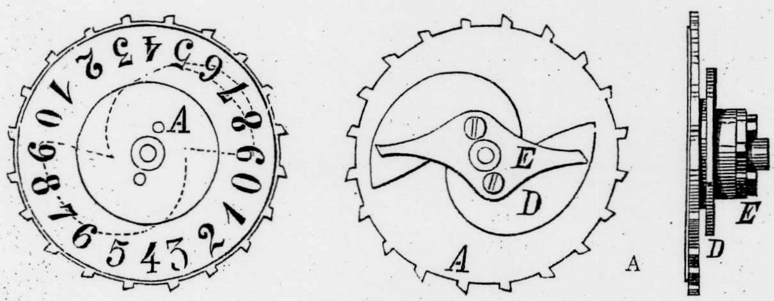


Fig. 652.

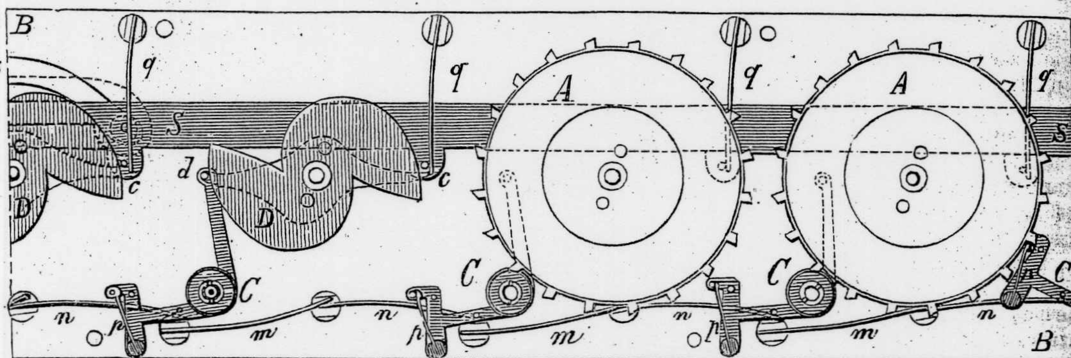


Fig. 653.

In ciascuno degli intervalli compresi fra i successivi quadranti A è disposta una leva C a due bracci ortogonali, girevole intorno ad un asse fissato alla lastra inferiore B B del meccanismo. Il braccio maggiore di questa leva porta un piccolo cilindro *d* fissato normalmente e girevole sul proprio asse. Al braccio minore è fissato inferiormente un altro cilindretto su cui agisce l'estremo libero di una molla *n*. Questa molla *n* ha per iscopo di tenere costantemente appoggiato il cilindro rotolante *d* sul contorno di un doppio eccentrico D (fig. 652 e 653) a spirale d'Archimede, fisso sull'asse di ciascuno dei quadranti A. Di questi eccentrici D il raggio vettore minore corrisponde alla cifra 0 del proprio quadrante A, il maggiore alla cifra 9.

Ciò posto si capisce facilmente come nella rotazione di ognuno dei quadranti A, la leva C corrispondente debba ruotare intorno al proprio asse con moto intermittente: mentre passano alla finestrella F le cifre 0, 1, 2, 3, ... essa cammina da destra a sinistra e descrive un certo arco; ma quando si passa dal 9 allo 0 successivo, essa, spinta dalla molla *n*, ritorna rapidamente alla posizione primitiva descrivendo lo stesso arco dell'andata.

Egli è in questo rapido movimento retrogrado della leva C che il suo braccio minore produce l'avanzamento del quadrante consecutivo di sinistra, cioè registra la decina di riporto. A tal uopo l'estremità di questo braccio minore porta una molletta *p*, la quale nel repentino ritorno della leva C incontra uno dei denti del quadrante vicino, e ne produce la rotazione di $^1/_{20}$ di giro. La stessa molla *p*, col disporsi contro il dente che precede quello su cui ha agito il suo estremo, fa da organo moderatore, impedendo che il quadrante spinto prenda a ruotare di un angolo maggiore di $^1/_{20}$ di giro.

Meccanismo per condurre tutti i quadranti alla cifra 9. — Per incominciare un'operazione tutti i quadranti A devono essere allo zero. La cosa si potrebbe ottenere mediante lo stilo, conducendoli separatamente a questa cifra. Però nell'intento di abbreviare tale operazione, il Roth ha disposto uno speciale meccanismo il quale permette di portare tutti i quadranti alla cifra 9. Aggiungendo allora 1 unità al primo quadrante di destra, cioè imprimendovi la rotazione di $^1/_{20}$ di giro, si conducono tutti i quadranti a 0, il che ha luogo con tale rapidità che l'occhio non può seguirne il successivo movimento.

A tale uopo, contro la lastra inferiore B B dell'apparecchio è disposta una spranghetta longitudinale S, la quale porta infissi 8 cilindretti o piuoli *c* equidistanti, che possono agire contro gli 8 eccentrici a due punte E fissi sull'asse dei quadranti A e disposti al disotto degli eccentrici D. La spranghetta S, alle estremità e nel punto di mezzo, porta infissi inferiormente altri tre piccoli cilindri, i quali, penetrando entro tre scanalature semicircolari *s* praticate nella lastra inferiore, dirigono il movimento della spranghetta stessa. Tale movimento è comandato da un'asticciuola sottostante alla lastra inferiore, che termina all'esterno con un bottone G manovrato a mano dall'operatore.

Estraendo il bottone G, tutti i piuoli *c*, che prima trovavansi alla destra dei varii quadranti, vengono ad occupare la posizione simmetrica di sinistra. In tale passaggio i piuoli *c* incontrano gli eccentrici E, e, trascinandoli nel loro movimento, conducono tutti i quadranti A alla cifra 9. È indifferente che i cilindretti *c* agiscano sull'una piuttostochè sull'altra delle due punte degli eccentrici E, giacchè, come abbiamo detto, ciascuna delle due metà dei quadranti A porta le stesse cifre nello stesso ordine e nello stesso senso. Per impedire poi che i quadranti stessi possano oltrepassare il 9, sono disposte le molle *q*, le quali, tostochè le finestrelle F segnano 9, vengono ad incontrare le punte degli eccentrici E fermandone immediatamente il moto.

Facendo rientrare il bottone G, i cilindretti *c* allontanano le molle *q* precedenti, ed essi pure si portano in tale posizione da rendere ogni quadrante libero ne' suoi movimenti.

Per condurre adunque tutti i quadranti allo 0 sarà d'uopo fare le seguenti operazioni:

1º Estrarre il bottone G finchè una lieve resistenza interna ne fermi il movimento; con questa operazione tutte le finestrelle F sono condotte a segnare 9;

2º Respingere il bottone G finchè sia tutto rientrato;

3º Fare avanzare di un dente l'ultimo quadrante di destra; allora apparisce immediatamente la cifra 0 a tutte le finestrelle F.

Pratica dell'addizionatore. — La somma di più numeri dati si fa inscrivendo successivamente questi numeri alle finestrelle F. Così cerchisi la somma 8897 + 2396.

Essendo tutti i quadranti a zero, si rappresenta alle finestrelle uno dei numeri proposti, ad es. il numero 8897. Si introduce adunque lo stiletto nel vano 7 del quadrante delle unità, e si fa ruotare il quadrante stesso da destra a sinistra finchè la scanalatura semicircolare *a* ne arresti il movimento; allo stesso modo si procede per la cifra 9 delle decine, per la cifra 8 delle centinaja, e per la cifra 8 delle migliaja. Le finestrelle F segneranno adunque il numero 8897.

Per aggiungere a questo il secondo numero dato, 2396, si fa la medesima operazione come, essendo le finestrelle a zero, si volesse inscrivere questo numero. S'introduce cioè lo stiletto nel vano 6 del quadrante delle unità e si fa ruotare questo quadrante da destra a sinistra finchè il suo movimento è fermato dalla scanalatura; in questa operazione al 7 della finestrella si aggiunge il 6, cosicchè appare la cifra 3, mentre la decina di riporto è registrata dai quadranti vicini di sinistra. S'introduce poscia successivamente lo stiletto nei vani 9, 3, 2, dei quadranti consecutivi di sinistra, facendo per ciascuno dei medesimi l'operazione precedente. Apparirà infine alle finestrelle la somma 11293 dei due numeri dati.

L'operazione si continuerebbe in modo identico trattandosi di aggiungere quanti altri numeri si vogliano ai due primi, finchè il totale non ha più di 8 cifre.

Abbiamo supposto che i numeri dati si inscrivano alle finestrelle incominciando da destra; l'operazione si potrebbe eseguire eziandio incominciando dalla sinistra, ed anzi in molti casi questo procedimento è preferibile.

Macchina per addizionare e sottrarre di Roth.

La macchina testè descritta non serve che per eseguire l'addizione; però il Roth, con lievissime modificazioni, ha pure costruito un apparecchio che permette di eseguire l'addizione e la sottrazione.

La differenza principale sta nei quadranti, sui quali è segnata (fig. 654), oltre alla doppia serie di cifre 0, 1, 2,..... 8, 9, 0, 1, 2, ... 8, 9, un'altra doppia serie uguale, disposta sopra di una circonferenza minore e concentrica, ma in ordine inverso, cioè colle cifre crescenti da destra a sinistra. Al 9 della doppia serie esterna corrisponde lo 0 di quella interna, cosicchè la somma delle cifre che si corrispondono nelle due serie è sempre eguale a 9.

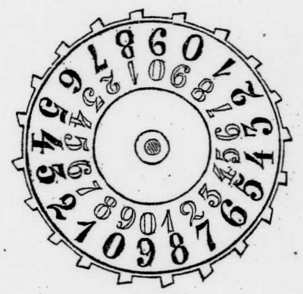


Fig. 654.

I numeri della serie esterna sono segnati in *nero* e servono per l'addizione; quelli della serie interna in *rosso* e servono per la sottrazione. Queste varie cifre appariscono a due serie di finestrelle disposte secondo rette parallele: la serie inferiore è destinata all'addizione, la superiore alla sottrazione.

Alle scanalature semicircolari sono pure segnate due graduazioni: l'una sul lembo esterno, colle cifre *nere* 0, 1, 2, ... 9 crescenti da sinistra a destra; l'altra sul lembo interno, colle medesime cifre, ma segnate in rosso e crescenti in ordine contrario; cosicchè anche qui la somma delle cifre che si corrispondono è sempre uguale a 9.

Per l'addizione si seguirà lo stesso procedimento indicato per l'*addizionatore*, operando sulle cifre *nere*. Per eseguire la sottrazione si dispongono anzitutto le finestrelle *nere* a 0, cosicchè le *rosse* segneranno tutte la cifra 9. Poscia collo stiletto si scrive il minuendo alle finestrelle *rosse* ed il sottraendo colle finestrelle *nere*; il resto apparirà alle finestrelle *rosse*. Allo scopo di evitare ogni confusione, è opportuno, prima di scrivere il sottraendo, di portare a 0 tutte le finestrelle *rosse* che non sono state impiegate per scrivere il minuendo.

Contatore di Roth.

Applicando ancora il meccanismo delle due macchine testè descritte, il Roth ha pure costruito un contatore di giri. In questo apparecchio il movimento è impresso al solo primo quadrante di destra, mercè un braccio girevole attorno ad un asse fissato alla lastra inferiore. Tale braccio comanda la leva ad angolo C del primo quadrante, e ad ogni sua andata fa avanzare di $\frac{1}{20}$ di giro il quadrante stesso; questo poi trasmette, nel modo indicato, le decine, le centinaja, ecc. agli altri quadranti. Il braccio motore si prolunga alquanto allo esterno della cassetta, e riceve il movimento dall'organo meccanico di cui si vogliono contare i giri.

Macchine che eseguiscono le varie operazioni dell'aritmetica.

Nel 1675 Leibnitz presentò alla Società reale di Londra il disegno di una macchina automatica, che doveva eseguire le quattro prime operazioni dell'aritmetica. La fece in seguito costrurre, e, dopo parecchi tentativi che gli costarono poco meno di 100 mila lire, presentò il suo apparecchio all'Accademia delle scienze di Parigi. Non si conosce il meccanismo interno di questa macchina; la sua azione però era assai imperfetta e poco sicura, malgrado le molte cure, e le gravi spese incontrate dal suo inventore.

I tentativi furono ripresi con maggior successo nel nostro secolo da Thomas (1820), Guenal (1820), Briet (1829), Schwilguè (1845), Iarton (1845), Favier e Gouchon (1846), Baranowski (1846), Billard (1847), Maurel e Iayet (1849), d'Argy (1850), Fahlman (1852), Grant (1870), Dietzschold (1880), Peterson (1882), Edmonson (1885), ecc. Ci occuperemo di alcune di queste macchine, di cui la più perfetta e la più conosciuta oggidì è l'*aritmometro* di Thomas.

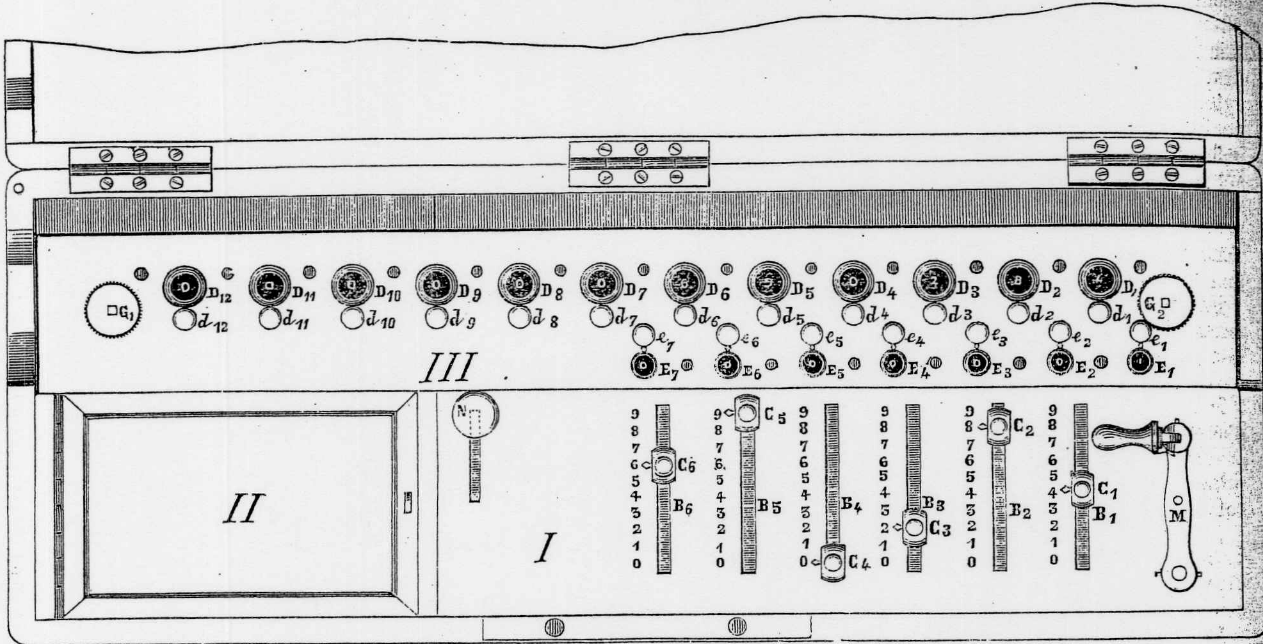


Fig. 655.

Aritmometro di Thomas.

Nel 1820 il signor Thomas *di Colmar*, direttore della Compagnia d'assicurazioni *Le Soleil*, ottenne in Francia il brevetto di privativa per una macchina da calcolare da lui denominata *aritmometro*. Nel 1821 la presentò alla *Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, e ne ricevette gli elogi in seguito a rapporto del Francœur (1). La ripresentò notevolmente perfezionata alla stessa Società nel 1851, ed ottenne in premio la medaglia d'oro, dietro il rapporto favorevole che ne fece il Benoit rilevandone le utili modificazioni introdotte (2). L'*aritmometro* ricevette in seguito altri notevoli perfezionamenti dal Thomas stesso, e dal figlio Thomas *di Bojano* (3), i quali l'hanno reso di uso assolutamente pratico.

La rara perseveranza con cui il Thomas si è applicato, per ben 30 anni di seguito, a perfezionare in tutte le minime parti il suo apparecchio, fu coronata da un successo ben meritato, poichè oggidì l'aritmometro è accettato dalla pratica, ed il suo uso va continuamente estendendosi. Qualunque sia la sorte che l'avvenire riserva a questa ingegnosa macchina calcolatrice, anche quando altre più perfette la sostituiranno, essa occuperà sempre un posto importantissimo nella tecnologia del calcolo.

Coll'aritmometro Thomas si possono eseguire automaticamente tutte le operazioni dell'aritmetica, compresa l'estrazione delle radici, con rigore assoluto e con procedimenti affatto analoghi a quelli che sono seguiti da chi fa queste operazioni col metodo ordinario. Ne divideremo lo studio in due parti: nella prima ci occuperemo dell'apparecchio mostrandone la costruzione e le proprietà; nella seconda parleremo del modo di valersene nell'esecuzione dei varii calcoli.

Descrizione dell'apparecchio. — Il Thomas costruisce tre modelli del suo *aritmometro;* essi sono detti a 6, ad 8, a 10 cifre, secondochè permettono di ottenere prodotti di 12, di 16 o di 20 cifre. La descrizione e le figure che seguono si riferiscono ad un modello a 6 cifre, costrutto secondo gli ultimi perfezionamenti apportati da Thomas di Bojano. L'intiero apparecchio è racchiuso entro una cassetta parallelepipeda di legno, che, per il modello in discorso, ha circa m. 0.46 di lunghezza, m. 0.18 di larghezza, e m. 0.10 di spessore (4). La fig. 655 rappresenta la projezione orizzontale dell'aritmometro, supponendo la cassetta aperta di fronte all'osservatore.

(1) *Bulletin de la Société d'encouragement*, 1822, pag. 33. Una descrizione particolareggiata, ed i disegni dell'aritmometro primitivo, si trovano nel *Bulletin* sopra citato, 1822, pag. 355.

(2) *Bulletin*, ecc., 1851, pag. 113.

(3) *Bulletin*, ecc., 1879, pag. 393.

(4) Per gli altri due modelli le dimensioni della cassetta sono rispettivamente 0.58 × 0.18 × 0.10 e 0.70 × 0.18 × 0.10.

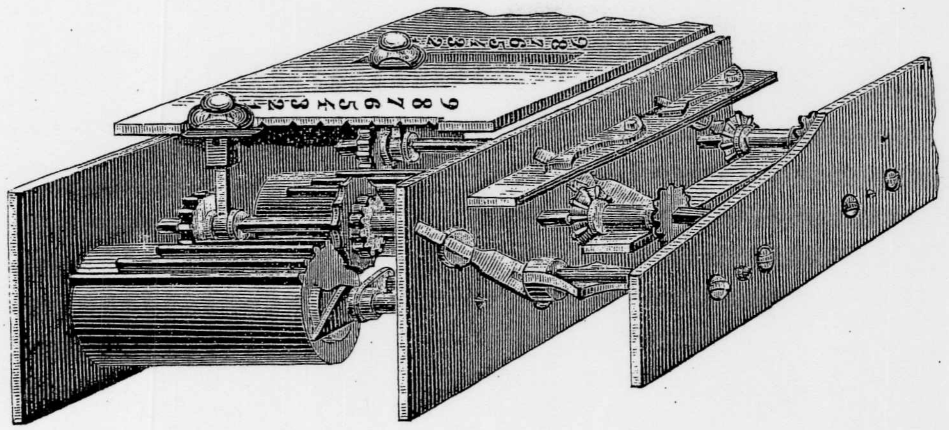


Fig. 656.

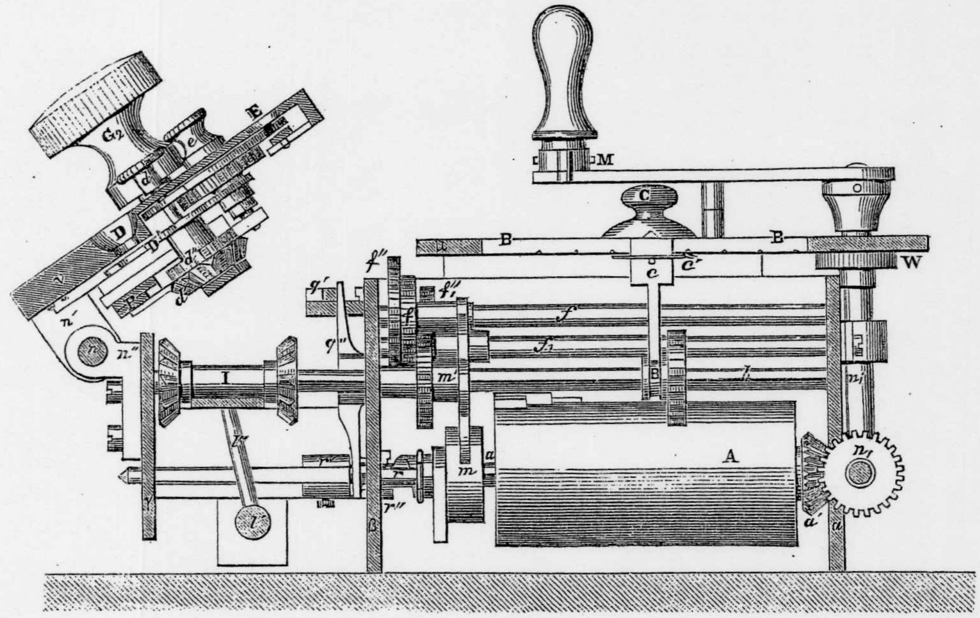


Fig. 657.

Organo caratteristico dell'aritmometro. — Il meccanismo dell'aritmometro è essenzialmente costituito da una serie di sistemi cinematici identici fra di loro, ciascuno dei quali corrisponde ad un ordine diverso di unità. L'organo caratteristico di tutti questi sistemi è un cilindro A (fig. 656 e 657), girevole attorno al suo asse *a*, e munito di 9 denti disposti secondo le generatrici. Le lunghezze di questi denti sono proporzionali ai numeri 9, 8, 7, ... 2, 1: il primo dente è lungo quanto il cilindro, ed i seguenti sono successivamente di meno in meno lunghi, fino all'ultimo che non occupa che $\frac{1}{9}$ del cilindro stesso. Il loro passo è $\frac{1}{20}$ della circonferenza, cosicchè in sezione trasversale essi abbracciano i $\frac{9}{20}$, cioè un po' meno della metà dell'intiero contorno, lasciandone liscia la parte rimanente. Questo cilindro è visibile nella figura prospettica 656, che indica la posizione relativa di alcuni degli organi principali della macchina, ed è rappresentato in projezione verticale nella fig. 657 (sezione trasversale dell'aritmometro).

Un rocchetto cilindrico B, di 10 denti uniformemente distribuiti alla sua periferia, è disposto sopra un asse di rotazione *b*, a sezione quadrata, parallelo all'asse del cilindro A, ed a tale distanza che i suoi denti possono imboccare con quelli del cilindro. Questo rocchetto B, mentre produce la rotazione dell'asse *b*, è scorrevole lungo l'asse stesso, e può essere portato o in corrispondenza del primo nono della lunghezza del cilindro A, o in corrispondenza del secondo nono, del terzo, ... od anche fuori del cilindro stesso.

Ciò posto, egli è chiaro che se il cilindro A compie un'intiera rivoluzione, il rocchetto B riceve uno spostamento angolare diverso a seconda della sua posizione lungo il proprio asse *b*. Così se il rocchetto B trovasi nel primo nono del cilindro A, ad un giro di questo, esso è incontrato da un solo dente, e perciò avanza di un solo dente o di $\frac{1}{10}$ di giro e poi si ferma; se trovasi nel secondo nono, ad ogni giro del cilindro A esso avanza di due denti o di $\frac{2}{10}$ di giro; se nell'ultimo nono, avanza di 9 denti; se trovasi infine fuori del cilindro A esso non imbocca con alcun dente, e quindi rimane costantemente in riposo.

Se poi il cilindro parzialmente dentato A compie 2, 3, 4, ... *n* giri, sempre nello stesso verso, il rocchetto B ruota in totale di un numero doppio, triplo, ... ennuplo di denti.

Possiamo adunque dire che:

Se m *è la distanza del rocchetto* B *dalla base del cilindro* A, *espressa in noni della lunghezza del cilindro stesso, il numero dei denti di cui ruota il rocchetto mentre il cilindro fa* n *giri intieri, è dato dal prodotto* m × n.

Ecco l'idea originale e semplicissima da cui è partito il Thomas. Vediamo ora come questo cilindro parzialmente dentato, che è un vero organo di moltiplicazione, sia stato applicato a tradurre in movimenti le operazioni dell'aritmetica.

Meccanismo riproduttore dei numeri. — Lo spostamento del rocchetto B lungo l'asse *b* è comandato da un bottone ad indice C, che si fa scorrere a mano lungo una scanalatura B B praticata al disopra e parallelamente all'asse del cilindro A, in una lastra metallica fissa μ che ricopre parte del meccanismo. Lungo un lembo di questa scanalatura sono incise 10 divisioni equidistanti, distinte coi numeri 0, 1, 2, ... 9, che corrispondono ai 9 spazii uguali in cui è divisa la lunghezza del cilindro parzialmente dentato. Quando l'indice C è sulla cifra 0, il rocchetto dentato B, portato dal medesimo mercè l'asta *c*, trovasi fuori del cilindro A e, per conseguenza, non riceve alcun movimento di rotazione; se l'indice C si fa scorrere sulla cifra 1, o sulla cifra 2, o sulla 3, ... o sulla cifra 9, il rocchetto B è al primo, al secondo, al terzo, ... all'ultimo nono della lunghezza del cilindro, e quindi, mentre questo fa una rotazione completa, esso ruota di 1, 2, 3, ... 9 denti.

L'asse *b* poi, che, come abbiamo veduto, riceve il moto dal cilindro A per mezzo del rocchetto B, trasmette questo moto ad un quadrante D' portato da una seconda lastra metallica superiore. Questa lastra, rappresentata in III nella fig. 655 ed in sezione nella fig. 657 (ove è distinta colla lettera ν), è mobile e può essere sollevata facendola ruotare attorno ad un asse *n* parallelo al suo spigolo posteriore. Nella fig. 657 tale lastra è supposta alquanto sollevata dalla sua posizione orizzontale, cosicchè il quadrante D', che normalmente è parallelo all'asse *b* e riceve il movimento da questo asse mercè un sistema di rocchetti conici di cui parleremo fra poco, in questa figura ha una direzione obliqua, e riesce affatto indipendente dall'asse *b*.

Il quadrante D' porta sulla faccia superiore la serie delle cifre 0, 1, 2, ... 9, crescenti da destra a sinistra (fig. 658). Queste cifre appariscono una ad una alla finestrella D praticata nella lastra mobile anzidetta dell'aritmometro (fig. 657).

La trasmissione del movimento fra l'asse *b* ed il quadrante D' ha luogo, quando la lastra mobile ν è abbassata, mediante tre rocchetti conici uguali fra loro e muniti ciascuno di 10 denti. Uno di essi *d'* è fisso sull'asse del quadrante D'; gli altri due sono congiunti da un manicotto I, che ruota coll'asse *b*. Questo manicotto I può ricevere un piccolo spostamento lungo l'asse *b*, e, secondochè è l'uno oppure l'altro dei suoi due rocchetti conici che è portato ad imboccare col rocchetto *d'*, il quadrante D' riceve moto rotatorio in un verso o nel verso contrario. A questo modo una rotazione continua e nello stesso verso del cilindro A può produrre rotazioni di verso contrario nel quadrante D': se col rocchetto *d'* imbocca il rocchetto anteriore del manicotto I, appariscono successivamente alla finestrella D i numeri 0, 1, 2, ... 9 in ordine crescente; se invece il rocchetto *d'* imbocca col rocchetto posteriore del manicotto I, appariscono gli stessi numeri in ordine decrescente. Diremo *positiva* la prima rotazione, *negativa* la seconda.

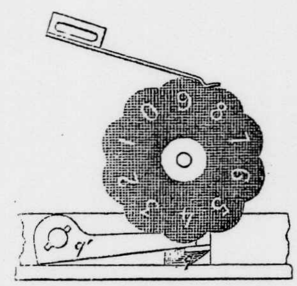


Fig. 658.

Vedremo tra poco, parlando del *commutatore*, come si ottenga lo spostamento del manicotto I che collega i due rocchetti conici disposti sull'asse *b*.

Intanto, poichè i tre rocchetti conici di cui abbiamo parlato sono identici fra di loro, ne consegue che ad ogni rotazione di un dente del rocchetto cilindrico B, il disco D' avanza di $\frac{1}{10}$ di giro, cioè alla finestrella D si cambia una cifra, sostituendosi a quella che appariva dapprima la cifra che la precede o la segue immediatamente. Ad ogni giro completo del cilindro parzialmente dentato A, si cambieranno dunque successivamente alla finestrella D tante cifre consecutive quanti sono i denti di cui ha ruotato il rocchetto cilindrico B; il che, come sappiamo, dipende dalla posizione occupata dal rocchetto stesso lungo il cilindro. Così suppongasi che alla finestrella D si legga la cifra 0 e che il rocchetto conico *d'* imbocchi col rocchetto anteriore del manicotto I, per modo che, ruotando il cilindro A e quindi l'asse *b*, il quadrante D' abbia la rotazione positiva. Allora se si fa scorrere il bottone ad indice C ad es. sulla cifra 5 della propria scanalatura, e si imprime al cilindro A una rotazione completa, i 5 denti del cilindro fanno ruotare di 5 denti il rocchetto B. Le ruote coniche attualmente in presa avanzano esse pure di 5 denti, ed il quadrante D' avanza di 5 cifre. Si vedono così successivamente apparire alla finestrella D le cifre 1, 2, 3, 4, e poi la 5 che sostituisce lo 0 primitivo; in seguito il quadrante si ferma, poichè il cilindro A presenta il suo contorno liscio al rocchetto B. Allo stesso modo, spostato convenientemente l'indice C lungo la scanalatura BB, con un giro completo del cilindro A, si può *riprodurre* alla finestrella D qualsiasi altro numero intiero compreso fra 0 e 9.

Dalle cose esposte possiamo fin d'ora renderci ragione delle proprietà di questo sistema riproduttore. Gioverà distinguere tre casi.

Supponiamo in primo luogo che, nel modo indicato, si sia riprodotto un certo numero alla finestrella D, ad es. il numero 3. Allora se noi, lasciando l'indice sulla cifra 3 ed il quadrante disposto per la rotazione positiva, facciamo sì che il cilindro A compia per lo stesso verso una seconda rivoluzione, è chiaro che si ripeteranno le stesse cose di prima. Cioè il rocchetto cilindrico B avanzerà di altri 3 denti, e così i rocchetti conici in presa, e così infine il quadrante D'. Alla finestrella D passeranno dunque successivamente altre tre cifre, 4, 5, ed infine 6,

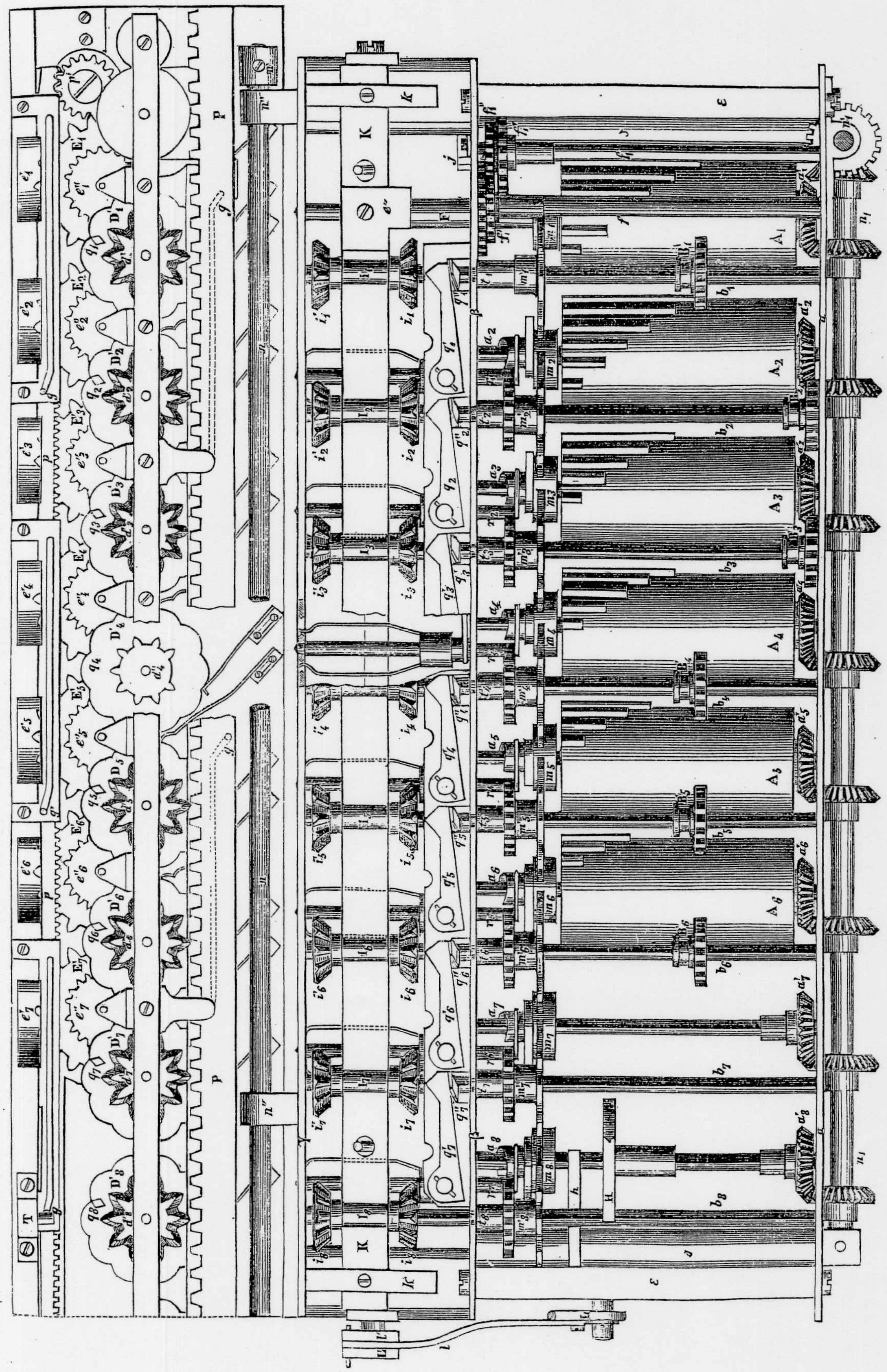


Fig. 659.

che ci dà il prodotto 2 × 3. Con una terza rivoluzione del cilindro A, sempre nello stesso verso, passeranno altre tre cifre, 7, 8, ed infine 9, che rappresenta il prodotto 3 × 3. Così si potrebbe continuare con una quarta, una quinta, ecc. rivoluzione, se il prodotto non risultasse maggiore di 9, e quindi impossibile a rappresentarsi con una sola finestrella. Ecco dunque che questo sistema si presta per la moltiplicazione: il numero dei giri del cilindro parzialmente dentato rappresenta il moltiplicatore, il numero inscritto alla scanalatura il moltiplicando.

Supponiamo in secondo luogo che, inscritto il numero 3 alla finestrella e lasciando ancora l'imbocco fra i medesimi rocchetti conici, si sposti l'indice C della scanalatura in modo da segnare un altro numero, tale però che sommato col primo non si superi 9, ad es. il numero 4. Allora è chiaro che ad un secondo giro del cilindro A, il rocchetto B avanza di 4 denti, e quindi alla finestrella si cambiano altre 4 cifre, apparendo successivamente le cifre 4, 5, 6, e poi la 7. Si ottiene così la somma 4 + 3 dei due numeri inscritti successivamente alla scanalatura. Ora spostiamo l'indice sopra un'altra cifra, 1 ad es., ed imprimiamo una terza rivoluzione al cilindro. Apparirà alla finestrella la cifra 8, che rappresenta la somma 4 + 3 + 1. Così si può procedere a sommare altri numeri, finchè non si supera 9.

Suppongasi infine che dopo inscritto un certo numero, per es. il 7, alla finestrella, si sposti il manicotto I sì che il quadrante D' sia disposto per la rotazione negativa. Allora facendo scorrere l'indice C finchè segni alla scanalatura un altro numero minore del precedente, ad es. il 3, una rivoluzione del cilindro A, sempre per lo stesso verso, farà sì che alla finestrella si cambieranno tre cifre, non più in ordine crescente, ma in ordine decrescente. Appariranno così successivamente le cifre 6, 5, e poi la 4 che si ferma, e che rappresenta la differenza 7 — 3 dei due numeri inscritti successivamente alla scanalatura. Con una seconda rivoluzione del cilindro si cambieranno altre tre cifre in ordine decrescente 3, 2, ed 1, che ci dà la differenza 7 — 2 × 3.

Possiamo adunque concludere che, trattandosi sempre di numeri e di risultati con una sola cifra, e supposto che il quadrante D' parta dallo zero:

1° *Inscritto un certo numero alla scanalatura, con una prima rivoluzione del cilindro parzialmente dentato questo numero è riprodotto alla finestrella: con una seconda, una terza, ecc. rivoluzione, sempre nello stesso verso, apparisce alla finestrella il doppio, il triplo, ecc. dello stesso numero;*

2° *Inscritti successivamente più numeri alla scanalatura, se dopo ciascuna inscrizione si imprime un'intera rivoluzione al cilindro parzialmente dentato, si ottiene alla finestrella la somma dei numeri successivamente inscritti;*

3° *Riprodotto un certo numero alla finestrella, se si dispone il quadrante per la rotazione negativa, e poscia si inscrive alla scanalatura un numero minore del precedente, con una rivoluzione, sempre nello stesso verso, del cilindro parzialmente dentato, si ottiene la differenza fra il primo ed il secondo; con una seconda, una terza, ecc. rivoluzione, la differenza fra il primo ed il doppio, il triplo, ecc. del secondo.*

Ci siamo occupati fin qui di un solo sistema riproduttore. Per estendere la proprietà di cui abbiamo parlato a numeri di più cifre, accanto al cilindro A con tutti i suoi accessorii (indice C, scanalatura B B, rocchetto cilindrico B, rocchetti conici congiunti dal manicotto I, quadrante D', e finestrella D) sono disposti, parallelamente, altri sistemi riproduttori affatto identici. Ognuno di essi serve per rappresentare le cifre di un ordine diverso di unità. Così il primo a destra riproduce le unità semplici, ed i consecutivi a sinistra, le decine, le centinaja, ecc. Nel modello di cui parliamo i cilindri parzialmente dentati sono 6: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Essi sono rappresentati in projezione orizzontale nella fig. 659, ed in projezione verticale nella fig. 660. In queste figure per ciascun sistema riproduttore gli stessi organi sono segnati colle stesse lettere, distinte però, come i cilindri A, cogli indici 1, 2, 3, 4, 5, 6: nella fig. 657, in cui è rappresentato uno qualunque di questi sistemi, abbiamo ancora le medesime lettere, ma senza indici.

I perni entro cui girano tutti gli assi a_1, a_2, ... a_6, b_1, b_2, ... b_6, sono scolpiti entro tre pareti metalliche $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$ (fig. 659, 660 e 661), che formano come l'intelajatura del meccanismo. La parete anteriore $\alpha\alpha$ e la parete mediana $\beta\beta$ sono collegate da quattro spranghette trasversali: due cilindriche inferiori $\delta\delta$, e due prismatiche superiori $\varepsilon\varepsilon$. La parete intermedia $\beta\beta$ e quella posteriore $\gamma\gamma$ sono congiunte, verso la metà della loro altezza, da due spranghette cilindriche $\eta\eta$.

Manovella motrice. — L'organo motore della macchina è una manovella M (fig. 655 e 657), la quale trovasi presso l'estremità destra dell'apparecchio, quando la cassetta è aperta di fronte all'operatore. Questa manovella, che si manovra a mano, comunica, mediante il proprio albero di rotazione n_1', un albero longitudinale n_1 n_1, e tante coppie di rocchetti conici, il moto rotatorio contemporaneamente a tutti i 6 cilindri A. L'albero longitudinale n_1 n_1, è rappresentato in sezione nella fig. 657, ed in projezione orizzontale nella fig. 659, ove i rocchetti conici fissi ai cilindri A sono indicati in a_1', a_2', ... a_6'.

La manovella M non può rotare che nel verso della rotazione positiva, cioè nel verso in cui rotano le sfere di un orologio, opponendosi al moto contrario una piccola ruota dentata W (fig. 657), munita di nottolino. Il moto rotatorio dei 6 cilindri A_1, A_2, ... A_6 e dei 6 rocchetti cilindrici B_1', B_2', ... B_6' può dunque avere luogo in un solo verso; ad ogni giro di manovella poi tutti i cilindri A fanno una completa rivoluzione, mentre i rocchetti B, come abbiamo veduto, ruotano soltanto di un angolo che corrisponde alla loro posizione lungo il proprio asse b.

Questa manovella porta infisso inferiormente un piccolo dente tagliato a piano inclinato, il quale viene a sovrapporsi ad un dente simile fisso, allorquando essa è nella posizione di partenza. Il leggiero ostacolo che l'operatore risente quando, ad ogni giro completo di manovella, questi due piani inclinati s'incontrano, gli permette di portarla esattamente nella sua posizione iniziale, e di contare facilmente il numero dei giri dati.

Due assi a_7, a_8, simili a quelli su cui sono fissati i cilindri A, e disposti alla loro sinistra, ricevono dalla manovella M un movimento identico per mezzo di altre due coppie di rocchetti conici, comandate dallo stesso albero longitudinale $n_1 n_1$. Così oltre ai 6 assi b_1, b_2, ... b_6, che portano i rocchetti cilindrici B'_1, B'_2, ... B'_6, sono, alla sinistra, disposti in modo simile altri due assi identici b_7, b_8; questi assi portano ancora il manicotto I, (I_7, I_8) coi proprii rocchetti conici, ma non sono muniti del rocchetto cilindrico B. I 4 assi a_7, a_8, b_7, b_8, servono, come vedremo in seguito, per trasmettere i riporti delle decine.

Commutatore. — Abbiamo veduto che tutti i cilindri dentati A non ruotano che in un solo verso, mentre i quadranti D' possono ricevere la rotazione positiva

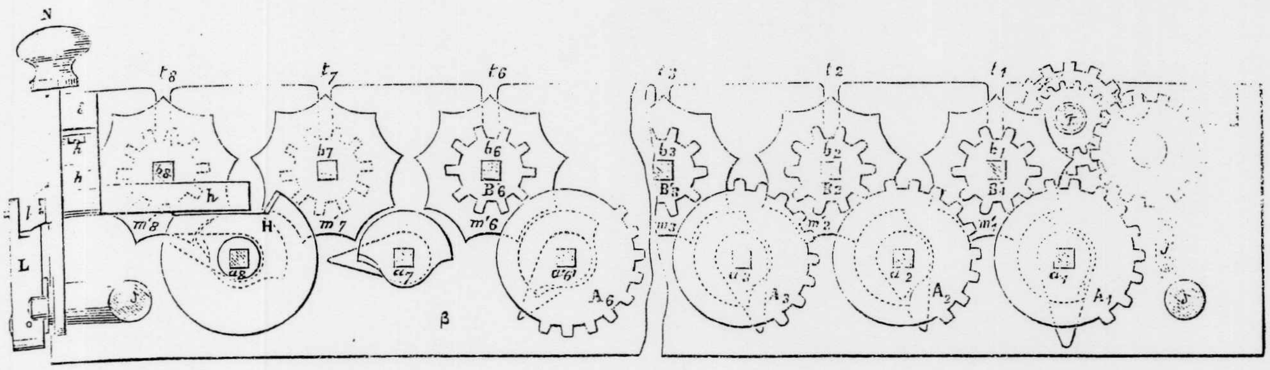


Fig. 660.

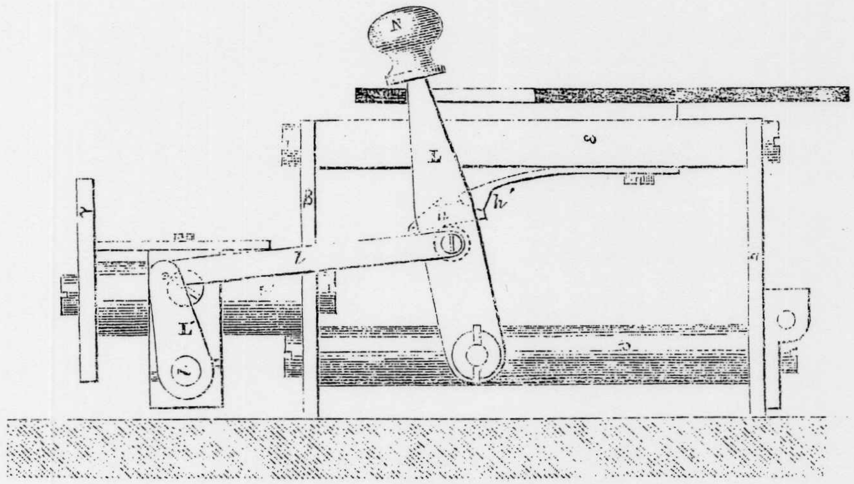


Fig. 661.

ovvero la rotazione negativa, secondochè i rocchetti conici d' imboccano coi rocchetti anteriori oppure coi rocchetti posteriori dei manicotti I. Lo spostamento di questi manicotti è ottenuto, simultaneamente per tutti, da un meccanismo speciale, il *commutatore*, che fu introdotto dal Thomas allo scopo di evitare la rotazione nei due sensi della manovella motrice.

Tale meccanismo consta di una spranghetta longitudinale KK (fig. 659), la quale collega inferiormente tutti gli 8 manicotti I. Questa spranghetta è comandata da una leva motrice L (fig. 659 e 661), mobile in un piano normale all'apparecchio entro una scanalatura praticata nella parete superiore; l'asse di rotazione della leva L è fissato alla spranghetta di collegamento δ. Mediante la biella l, la leva L agisce sopra una seconda leva L', la quale produce la rotazione dell'albero longitudinale l' (vedasi pure la fig. 657). Tale rotazione dà luogo allo spostamento dei due bracci l'', che attraversano due piccoli fori oblunghi praticati nella spranghetta KK, visibili nella fig. 659. Lo spostamento dei due bracci l'' produce infine nella spranghetta KK la piccola traslazione necessaria perchè l'imbocco coi rocchetti d' si faccia coll'una oppure coll'altra serie dei rocchetti conici collegati dai manicotti I. La corsa della spranghetta KK è limitata dalle due piastrine k, k che essa trascina nel suo movimento, e che vengono ad urtare contro una delle due pareti longitudinali γγ, ββ posteriore e mediana.

La leva motrice L (fig. 661) termina superiormente con un bottone N, per mezzo del quale l'operatore la spinge contro l'una oppure l'altra estremità della propria scanalatura; una molla h', che agisce col suo estremo libero sopra un doppio piano inclinato h'' fisso alla leva stessa, serve a mantenerla nelle sue posizioni estreme.

La scanalatura in cui si muove la leva L trovasi, come si vede nella fig. 655, a sinistra delle 6 scanalature B_1, B_2, ... B_6, che servono per inscrivere i numeri. Ad una delle estremità di questa scanalatura sono incise le parole ADD.on ET MULT.on, all'altra le parole SOUST.on ET DIVIS.on. Quando l'operatore spinge il bottone N alla prima estremità, i quadranti D' ricevono la rotazione positiva: quando invece il bottone N è portato alla seconda estremità, i quadranti D' ruotano nel senso negativo, mentre la manovella motrice M continua a girare per il medesimo verso. La prima posizione del bottone serve per l'addizione e la moltiplicazione; la seconda per la sottrazione, la divisione e la estrazione delle radici (1).

(1) Questo meccanismo, destinato ad invertire il movimento dei quadranti D', non esisteva nel primo aritmometro presentato dal Thomas alla *Société d'encouragement* nell'anno 1821, e fu uno dei più notevoli perfezionamenti apportati a tale macchina. Nell'aritmometro primitivo i quadranti D' potevano avere la sola rotazione positiva, ma portavano, come nell'addizionatore Roth, due doppie serie di numeri dallo 0 al 9, disposte secondo circonferenze concentriche ed in ordine inverso. Queste cifre apparivano a due serie di finestrelle, e due piastrine permettevano di chiudere l'una o l'altra delle due file di finestrelle a seconda del bisogno.

Per impedire poi che, urtando per caso il bottone N, si possa durante un'operazione cambiare inopportunamente il verso della rotazione dei quadranti D', le cose sono disposte in modo che questo bottone non può essere portato dall'una all'altra delle sue posizioni estreme se non quando la manovella M si trova nella posizione di partenza. A tale scopo alla leva motrice L è fissata normalmente una laminetta h, visibile nelle fig. 659 e 660; questa laminetta h, nel movimento della leva L dall'una all'altra delle sue posizioni estreme, passa nel piano di un disco H fissato normalmente all'asse a_8. Il disco H porta un taglio, destinato a lasciar passare la laminetta h, ma che non si trova nella posizione conveniente che allorquando la manovella motrice è nella posizione iniziale.

Parete superiore. Lastra fissa e lastra mobile. — L'intiero meccanismo dell'aritmometro è ricoperto superiormente da due lastre metalliche: la prima I (fig. 655) è fissa; le seconda III può rotare e scorrere lungo un asse longitudinale sottostante.

Nella *lastra fissa* I sono praticate, parallelamente agli assi dei 6 cilindri parzialmente dentati e direttamente al disopra di ciascuno di essi, le 6 scanalature graduate $B_1, B_2, ... B_6$, di cui abbiamo già parlato. In queste scanalature, mercè i bottoni ad indice $C_1, C_2, ..$. C_6, che l'operatore sposta a mano, si scrivono le cifre successive dei numeri sui quali devesi operare: numeri da sommare o sottrarre, moltiplicandi o divisori, secondo l'operazione da eseguirsi. Una piccola molla c' (fig. 657), di cui è munito ciascuno dei bottoni $C_1, C_2, ... C_6$, e che penetra in apposite incavature praticate al disotto delle scanalature graduate, serve a fissare leggermente la posizione di questi bottoni sopra ciascuna delle 10 cifre della graduazione.

Nella stessa lastra fissa I, alla sinistra, trovasi la scanalatura entro cui si muove il bottone N del commutatore.

La *lastra mobile* III porta due serie di finestrelle: una serie superiore $D_1, D_2, ... D_{12}$, ed una serie inferiore $E_1, E_2, ... E_7$. Le prime sono dette *finestrelle dei prodotti* o *grandi finestrelle*; alle medesime si leggono le somme, i prodotti, ed anche i resti delle divisioni o delle estrazioni di radici. Le seconde, di cui parleremo in seguito, sono chiamate *finestrelle dei quozienti* o *piccole finestrelle*. Fra tutte queste finestrelle sono praticati dei forellini, in cui possono introdursi dei piccoli aghi di avorio destinati a separare la parte intiera dalla parte decimale nei numeri su cui si opera.

A ciascuno dei 6 cilindri parzialmente dentati A corrisponde la propria finestrella D, a cui appariscono le cifre dei quadranti D': però sulla lastra mobile, oltre a queste 6 finestrelle $D_1, D_2, ... D_6$, ne sono disposte a sinistra e sulla stessa retta altre 6 $D_7, D_8, ... D_{12}$ identiche affatto alle prime, ed alla medesima distanza fra di loro. Ciascuna di esse è munita del proprio quadrante D' e del rocchetto conico d'. Tutti questi rocchetti conici $d_1', d_2', ... d_{12}'$, coi relativi quadranti $D_1', D_2', ... D_{12}'$, sono fissati sulla faccia inferiore della lastra mobile. Essi sono visibili nella fig. 659, in cui la lastra mobile III è supposta rialzata e poscia ribaltata orizzontalmente.

Il numero delle finestrelle D è adunque doppio del numero dei cilindri parzialmente dentati. Come vedremo parlando delle varie operazioni che si eseguiscono coll'aritmometro, queste 12 finestrelle sono disposte affinchè sia possibile di rappresentare in esse tutte le cifre del prodotto di due numeri di 6 cifre. Naturalmente non essendo che 6 i cilindri, ed 8 i manicotti I a doppio rocchetto conico, non potranno essere in presa con questi rocchetti che 8 per volta dei rocchetti $d_1', d_2', ... d_{12}'$ portati dai quadranti D'. Orbene la lastra mobile III, oltre al potersi sollevare colla rotazione attorno all'asse longitudinale $n n$, può farsi scorrere lungo l'asse stesso, per modo da portare uno dei rocchetti $d_9', d_{10}', d_{11}', d_{12}'$ ad ingranare successivamente col manicotto a doppio rocchetto I corrispondente all'asse b_8: e nelle diverse posizioni anche tutti gli altri 8 quadranti successivi a destra sono in presa con gli 8 manicotti I.

Per facilitare lo spostamento della lastra mobile III, e non permetterne il completo abbassamento che nelle posizioni in cui gli ingranaggi che devono imboccare possono venire in presa, sono praticati nella parete longitudinale intermedia 55 degli intagli od incavature $t_1, t_2, ... t_8$ poste al disopra di ognuno degli alberi quadrati $b_1, b_2, ... b_8$ (fig. 659 e 660). Un dente T fisso inferiormente alla lastra mobile, penetra in uno di questi intagli allorchè la lastra occupa la precisa posizione voluta. In causa poi dell'altezza di questo dente la lastra mobile non può essere abbassata a sufficienza per mettere gli ingranaggi in presa, che allorquando il dente si trova al disopra di uno degli intagli t. I bordi superiori di questi intagli sono arrotondati a fine di rendere più facile l'introduzione del dente T.

Dopo di aver sollevata adunque la lastra mobile, afferrandola per i due grandi bottoni G_1, G_2 di cui parleremo in seguito, basterà, per spostarla di un posto, produrre una trazione longitudinale, lasciandola abbassarsi per il proprio peso affinchè il dente T, penetrando di per sè nel primo intaglio t che trova, limiti la corsa della lastra. Sollevandola di nuovo, ed operando allo stesso modo, la si sposterà di due posti, e così di seguito. Il piccolo rumore che, ad ogni spostamento, produce l'introduzione del dente T in uno degli intagli $t_1, t_2, ...$ t_8, permette di contare assai facilmente il numero dei posti di cui si sposta. Questo spostamento della lastra mobile corrisponde allo spostamento della virgola nelle operazioni usuali, cioè equivale ad una moltiplicazione o ad una divisione per 10, 100, 1000, ecc. del numero inscritto alle finestrelle.

Bottoni che conducono separatamente a zero i quadranti superiori. — Ciascuno dei quadranti D' (fig. 655 e 657) è munito di un bottoncino d fisso sul suo asse, che serve a metterlo separatamente allo zero od a quell'altra cifra che si desidera. Questi bottoncini $d_1, d_2, ... d_{12}$ si manovrano a mano dell'operatore, dopo di aver resi i quadranti liberi dai cilindri dentati, cioè tenendo sollevata la lastra mobile III.

Il moto che con questi bottoncini si imprime ai quadranti $D'_1, D'_2, ... D'_{12}$ (fig. 659), non è continuo, ma intermittente per modo che ogni cifra si fermi un istante sotto la relativa finestrella. A tale scopo il contorno di ciascun quadrante è tagliato secondo una curva a 10 lobi, e due piccole molle le cui estremità libere premono sul contorno stesso, producono un lieve ostacolo al passaggio di ciascuna cifra.

Meccanismo che conduce a zero contemporaneamente tutti i quadranti superiori. — Tutti poi i quadranti superiori $D'_1, D'_2, ... D'_{12}$ possono essere condotti simultaneamente allo zero, mediante un bottone G_1 (fig. 655) che trovasi presso l'estremità di sinistra della lastra mobile. Questo bottone che l'operatore, dopo di avere sollevata la lastra mobile III, fa girare colla mano sinistra nel verso contrario a quello degli indici d'un orologio, produce il movimento di una lunga dentiera P disposta al disotto della lastra mobile stessa. La dentiera P è rappresentata in sezione trasversale nella figura 657 ed in projezione orizzontale nella figura 659:

l'estremità di sinistra di questa dentiera è indicata a parte nella figura 662.

Il bottone G_1 porta inferiormente un rocchetto cilindrico P' (fig. 662), il quale imbocca colla dentiera P;

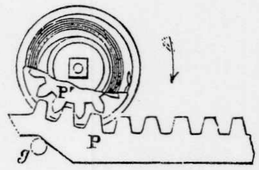


Fig. 662

facendo ruotare da destra a sinistra il bottone G_1 e quindi il rocchetto P', ha luogo un doppio spostamento nella dentiera P, cioè uno spostamento trasversale ed uno spostamento longitudinale. A tale intento, verso la estremità di sinistra, la linea primitiva dei denti della dentiera P si ripiega alquanto, e la dentiera stessa a questa estremità è tagliata a piano inclinato. Questo piano inclinato rimane costantemente a contatto di un dente g fisso nella lastra mobile, cosicchè facendo muovere il bottone G_1, la dentiera P dapprima si avvicina e poscia produce la rotazione dei rocchetti cilindrici a 10 denti d'' (fig. 657) fissi coi rocchetti conici d', sugli assi dei quadranti D'. Questa rotazione però cessa tosto che lo zero di ciascun quadrante D' è comparso alla relativa finestrella, poichè il Thomas ebbe l'ingegnosa idea di sopprimere in ciascuno dei 12 rocchetti cilindrici d'' il dente che corrisponde allo zero dei quadranti; la cosa è visibile nella fig. 659, ove il rocchetto cilindrico d''_4 del quadrante D'_4 è completamente rappresentato, essendo supposto tolto il relativo rocchetto conico d'_4.

Appena condotti tutti i 12 quadranti D' allo zero, rilasciando il bottone G_1, questo, mercè una molla a spirale congiunta al suo asse ed indicata in parte nella fig. 662, prende da sè a girare in senso contrario, e riconduce la dentiera P nella posizione primitiva, in cui l'incastro coi rocchetti cilindrici d'' non ha più luogo. La dentiera P adunque non agisce sui rocchetti d'' che allorquando si vogliono ricondurre tutti i quadranti D' allo zero, mentre normalmente è a tale distanza dai rocchetti stessi, da non produrre alcun ostacolo al movimento che i quadranti D' devono ricevere dai cilindri parzialmente dentati A.

Due altri piccoli denti g, g (fig. 659), che penetrano in acconcie scanalature praticate nella dentiera P a metà lunghezza e verso l'estremo destro, guidano questa dentiera nel suo doppio movimento longitudinale e trasversale (1).

Ruote moderatrici. — Quando si opera rapidamente coll'aritmometro, può darsi che i rocchetti cilindrici B'_1, B'_2,....B'_6 facciano, come suol dirsi, *volante*; cioè che in virtù dell'inerzia oltrepassino la posizione a cui sono condotti dai cilindri dentati A_1, A_2,.... A_6, sicchè potrebbe succedere che alle finestrelle D corrispondenti, si cambi una cifra di più. L'attrito parebbe il mezzo più opportuno per ottenere l'inerzia di questi rocchetti, ma creerebbe una difficoltà al movimento della manovella. Il Thomas è riuscito ancora a trovare un'ingegnosa disposizione cinematica che, senza il soccorso di alcun attrito, fissa la posizione di ciascun rocchetto B' nell'istante in cui cessa il loro imbocco coi cilindri parzialmente dentati.

Per tale scopo, a ciascuno degli alberi quadrati b_1, b_2,... b_8 (fig. 657, 659 e 660) è fissata una ruota stellata m'_1, m'_2,... m'_8 col contorno formato da 9 archi di circolo, i quali combaciano esattamente su di un settore circolare m_1, m_2,.... m_8 portato da un manicotto girevole e scorrevole sull'asse del cilindro A vicino. Questi settori circolari, come fa vedere la figura 660, hanno l'ampiezza di circa 180° e corrispondono alla parte liscia dei cilindri parzialmente dentati. Essi permettono quindi il moto dei rocchetti cilindrici B'_1, B'_2,.,.. B'_6 quando questi sono in presa coi rispettivi cilindri dentati, ma ne arrestano il movimento appena che l'imbocco cessa, cioè quando i cilindri parzialmente dentati presentano la loro parte liscia ai rocchetti.

Meccanismo dei riporti. — Supponiamo che tutti gli indici C_1, C_2,.... C_6 e le finestrelle D_1, D_2,.... D_{12} siano allo zero, e che il bottone N del commutatore sia sul segno *Addizione - Moltiplicazione*, cioè che i quadranti D' siano disposti per ruotare nel verso positivo. Allora, da quanto si è detto precedentemente, noi possiamo riprodurre alle finestrelle D qualsiasi numero avente meno di 7 cifre, cioè compreso fra 0 e 999999.

Consideriamo ad es. il numero 690284. Faremo scorrere l'indice C_1 della prima scanalatura di destra o delle unità sulla divisione 4 (fig. 655), ed i cinque consecutivi di sinistra rispettivamente sulle divisioni 8, 2, 0, 9, 6. Il numero 690284 rimane così scritto alle scanalature. Allora un giro dato alla manovella M riprodurrà questo numero alle 6 prime finestrelle superiori, come indica la figura 655.

Inscritto così un numero qualunque alle grandi finestrelle D, supponiamo che gli indici C annessi ai rocchetti cilindrici dei varii sistemi si dispongano lungo le loro scanalature in modo di segnare un altro numero, tale però che ognuna delle sue cifre sommata con quella dello stesso ordine del numero precedente non superi 9. Allora evidentemente un secondo giro della manovella motrice M farà senz'altro apparire alle grandi finestrelle la somma di questi due numeri, e si potrà continuare ad aggiungere così uno o più altri numeri, finchè la somma delle unità dello stesso ordine non supera 9.

Ma perchè l'apparecchio possa servire a sommare numeri qualsiasi, occorrerà che i varii quadranti D' siano collegati da uno speciale meccanismo atto ad operare i riporti. Parlando dell'*addizionatore* Roth, abbiamo dimostrata la necessità che questi riporti si facciano in modo successivo. Questa condizione essenzialissima è pienamente soddisfatta anche nell'aritmometro Thomas. Vi ha tuttavia una differenza ben grande fra il meccanismo dei riporti impiegato dal Thomas, e quello impiegato dal Roth; differenza che dipende essenzialmente dal principio diverso su cui sono fondate le due macchine calcolatrici. Nell'addizionatore Roth, come abbiamo veduto, le ritenute si fanno durante la somma stessa, man mano che occorrono, precisamente come chi fa l'addizione col metodo ordinario. Nell'aritmometro Thomas invece, l'addizione è scomposta in due operazioni distinte: nella prima, nel primo mezzo giro di manovella, quando cioè i denti dei cilindri A agiscono sui rocchetti scorrevoli B' e quindi sui quadranti D', si

(1) Il Thomas costruisce pure degli aritmometri senza il bottone G_1 e quindi senza il meccanismo speciale (*effaceur*), di cui abbiamo ora parlato, per ricondurre ad un tempo tutti i quadranti D' allo zero. Con questi apparecchi si può raggiungere lo stesso scopo in altra maniera, cioè scrivendo alle scanalature B_1, B_2,... lo stesso numero che è scritto alle finestrelle D_1, D_2..., poi effettuando la sottrazione con un giro di manovella, come vedremo parlando del modo di eseguire la sottrazione.

fa un'addizione fittizia senza tener conto dei riporti; nella seconda, nel secondo mezzo giro di manovella, quando i cilindri non agiscono più sui quadranti, si corregge il risultato della prima operazione, eseguendo opportunamente i riporti.

Ecco come il Thomas, negli ultimi suoi aritmometri, ha congegnato il meccanismo dei riporti. Quando lo 0 che segue il 9 di uno qualunque dei quadranti D'_1, D'_2..... D'_{12} (fig. 657 e 659) sta per arrivare alla propria finestrella, un piccolo dente q_1, q_2,..... q_{12} di acciajo, a sezione di rombo, fisso al disotto del quadrante stesso sul raggio che passa fra le cifre 0 e 9, spinge e fa ruotare il braccio di una leva q'_1, q'_2..... q'_7. Queste leve sono girevoli intorno ad assi fissati su di una lastra congiunta alla parete intermedia $\beta\beta$, e la loro estremità libera termina con un doppio piano inclinato; è su questo che viene ad agire uno dei denti q_1, q_2,..... q_{12}, quando la lastra mobile è abbassata.

Le leve q'_1, q'_2,..... q'_7 sono mantenute nella loro posizione ordinaria dal braccio superiore di altrettante leve oblique q''_1 q''_2,..... q''_7; una di queste leve oblique q'' è rappresentata di fianco nella figura 657, e di fronte nella figura 663. Queste leve oblique q'' ruotano attorno

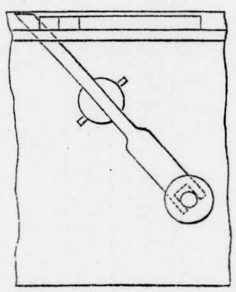


Fig. 663.

ad assi fissati nalla lastra intermedia $\beta\beta$, e col loro estremo inferiore, foggiato a forcella, si appoggiano contro un cilindretto r' fissato su di un piccolo asse scorrevole r. Nella figura 659 gli assi r sono rappresentati in r_1, r_2,..... r_7, ed uno di questi, l'asse r_3, è intieramente visibile, col proprio cilindretto r'_3 che agisce sul braccio inferiore della leva obliqua q''_3.

Ognuno degli assi r_1, r_2,..... r_7, è disposto parallelamente ed a piccola distanza dall'asse del cilindro parzialmente dentato consecutivo di sinistra, ed è congiunto, mercè una piastretta normale, ad uno dei settori di moderazione m_2, m_3,..... m_8, che possono ruotare e scorrere lungo l'asse dello stesso cilindro. Questi settori portano un lungo dente o *dito*, che vedesi distintamente nella figura 660. Tutti questi lunghi denti sono calettati in modo che il loro asse dista di un passo dall'asse dell'ultimo dente del proprio cilindro parzialmente dentato, cioè sono disposti esattamente a 180° sull'asse del primo dente del cilindro stesso. Or bene, quando una delle leve q', ad es. la leva q'_3 (fig. 659), per l'azione del dente q_3 del proprio quadrante D'_3, si sposta avvicinandosi alla parete $\beta\beta$ intermedia, la leva obliqua q''_3 ruota intorno al proprio asse, e, coll'estremo inferiore, allontana dal cilindro dentato successivo di sinistra A_4 l'asse scorrevole r_3, e per conseguenza il settore di moderazione m_4. Con questo spostamento, il *dito* portato da tale settore si avvicina alla parete intermedia $\beta\beta$, e viene a portarsi nel piano di un rocchetto dentato cilindrico a 10 denti fisso stabilmente sull'asse b_4 successivo di sinistra, e situato dietro la ruota stellata moderatrice m'_4. Il *dito* imboccando con questo rocchetto, lo sposta di un dente, e per conseguenza produce l'avanzamento di una cifra nel quadrante successivo di sinistra D'_4.

Però l'imbocco del *dito* col rocchetto cilindrico fisso sull'asse b_4 non può aver luogo che a partire dall'istante in cui il rocchetto cilindrico mobile B'_4, portato dallo stesso asse b_4 del quadrante vicino di sinistra D'_4, non riceve più alcun movimento dal proprio cilindro A_4.

Basta rifiettere perciò che ognuno dei cilindri A_1, A_2,..... A_6 non è dentato che per metà circa del proprio contorno, e quindi un giro completo di uno qualunque di essi, ad es. del cilindro A_4, può intendersi diviso in due parti. Nel primo mezzo giro il rocchetto mobile B'_4 su cui agisce, ruota di un certo numero di denti corrispondenti alla sua posizione lungo l'asse b_4; nell'altro mezzo giro il rocchetto B'_4 sta fermo. Ebbene è appunto al principio di questo mezzo giro a vuoto del cilindro A_4 che il *dito* portato dal settore m_4, per la sua speciale posizione, entra in giuoco ed imprime all'asse b_4 vicino di sinistra la rotazione di $\frac{1}{10}$ di giro che corrisponde al giro intiero del quadrante precedente.

Appena prodotto questo effetto, il dente q_3 abbandona la leva q'_3, ed allora il settore m_4, che è foggiato a superficie elicoidale verso la parete intermedia $\beta\beta$, viene ricondotto alla primitiva posizione mercè l'azione di questa superficie elicoidale che scorre contro un dente fisso alla parete intermedia stessa. Questo dente è visibile nella figura 657, ove è distinto colla lettera r''.

Nel modo retrogrado del settore m_4, l'asse scorrevole r_3 (fig. 659) sposta la leva obliqua q''_3 e questa riconduce pure la leva superiore q'_3 nella posizione ordinaria. Tutte le parti del meccanismo sono così riportate nelle posizioni relative iniziali, e la macchina è disposta per continuare l'addizione di nuovi numeri.

Al cilindretto r' (fig. 657) su cui si appoggia la forcella della leva obliqua q'', sono fissate due piccole molle (vedasi pure la fig. 659) le cui estremità libere penetrano in due fori praticati nella parete posteriore $\gamma\gamma$. Queste mollette, premendo contro i bordi dei due fori, formano freno, in modo da mantenere con una certa resistenza allo spostamento l'asse r allorquando è portato nell'una o nell'altra delle sue posizioni estreme.

Nel primo cilindro dentato A_1 il settore di moderazione m_1 non porta il *dito* di cui abbiamo parlato fin qui, perchè il primo quadrante non ha da registrare alcun riporto. Esso porta il solo settore m_1 fisso sul suo asse ed un altro dente o *dito*, visibile nella figura 660, e di cui parleremo in seguito.

Tutti i settori di moderazione m_1, m_2,..... m_8, che come abbiamo veduto or ora, ricevono un piccolo spostamento lungo i proprii assi a_1, a_2..... a_8, hanno un'altezza superiore alla loro corsa, cosicchè essi agiscono sempre allo stesso modo sulle ruote stellate m'_1, m'_2,..... m'_8.

Ecco spiegato in qual modo ciascun quadrante D' è messo in comunicazione col quadrante dell'ordine immediatamente superiore, allo scopo di eseguire automaticamente i riporti delle decine. Questi riporti poi si fanno successivamente dalla destra alla sinistra a ciascun ventesimo di giro dei cilindri parzialmente dentati. Il Thomas ottiene assai facilmente questo risultato, disponendo i varii cilindri, a partire dal secondo, in modo che ciascuno di essi nel suo moto di rotazione sia in ritardo di $\frac{1}{20}$ di giro sul precedente; così l'arrivo dei denti uguali di questi cilindri nel piano dei loro assi, non succede per tutti nel medesimo istante, ma successivamente ad ogni ventesimo di giro (1). In virtù di questa orientazione diversa dei cilindri, se i 6 primi quadranti a destra segnano la cifra 9, e si aggiunge una unità al numero così formato, inscrivendo alla prima scanalatura di destra il numero 1 e dando un giro di manovella, si vedrà apparire successivamente da destra a sinistra la cifra 0 a tutte le 6 finestrelle; e tutti questi riporti si effettuano senza che sia necessario di sviluppare, in ciascun istante del movimento, uno sforzo più considerevole che per operare il riporto ad un solo quadrante.

Contatore dei giri della manovella motrice. — Oltre alle finestrelle D_1, D_2,..... D_{12} di cui abbiamo fin qui parlato, nella lastra mobile III (fig. 655) sono scolpite, inferiormente alle medesime, altre 7 finestrelle E_1, E_2,.... E_7, chiamate, come si è già detto, *finestrelle dei quozienti* o *piccole finestrelle*. A queste finestrelle l'operatore trova registrati, come verifica, i moltiplicatori di cui fa uso, e vi legge i quozienti e le radici. Ad esse sottostanno 7 quadranti dentati (fig. 657 e 659) E'_1, E'_2, ... E'_7, a 18 denti. Sulla faccia superiore di ognuno di questi quadranti (fig. 664) sono segnate 18 cifre, cioè la cifra 0,

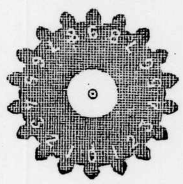


Fig. 664.

ed a destra ed a sinistra la serie 1, 2, 3...., fino al 9 che è comune alle due serie di cifre ed è posto sul diametro passante per la cifra 0. A questo modo, qualunque sia il verso della rotazione impressa a questi quadranti, se essi partono dallo 0, nel primo mezzo giro appariscono sempre alle finestrelle le cifre 0, 1, 2,..... 9 in ordine crescente; se la rotazione oltrepassa 9 denti, appariranno invece alle finestrelle E le cifre in ordine decrescente.

Questi quadranti sono destinati a numerare i giri della manovella motrice. Essi però, essendo affatto indipendenti l'uno dall'altro, non costituiscono propriamente un contatore destinato a registrare un numero qualunque di giri; ma il loro unico ufficio è di contare i giri di manovella fino a 9 nelle varie posizioni che può prendere la lastra mobile III. Essi perciò non sono comandati dalla manovella motrice che uno alla volta.

Ecco in qual modo il moto della manovella è comunicato ad uno di questi quadranti E'. Parallelamente ed al disopra dell'asse del primo cilindro parzialmente dentato A_1, è disposto un asse di rotazione f (fig. 657, 659 e 660) su cui sono fissate due ruote dentate cilindriche f', f''. La maggiore di esse f'', quando la lastra mobile è abbassata, penetra in una delle cavità e'_1, e'_2,..... e'_7 praticate al disotto della lastra stessa, ed imbocca con uno dei quadranti dentati E'_1, E'_2,..... E'_7. Quando si sposta la lastra mobile di uno o più posti, si cambia il quadrante E' che imbocca colla ruota f''.

Parallelamente ed a destra del precedente, vi ha un altro asse di rotazione f_1, esso pure munito di due ruote dentate f'_1 ed f''_1. Di queste la minore f''_1 è identica ed imbocca colla ruota f' dell'asse f precedente, cosicchè i due assi f ed f' fanno rotazione uguali e di verso contrario.

Sull'asse di rotazione del primo cilindro dentato A_1, il settore di moderazione m_1 è fisso e non porta il *dito* destinato al riporto delle decine. Come indica la fig. 665, che rappresenta la projezione orizzontale di questo primo cilindro A_1, il suo asse è munito di un manicotto speciale F che ruota coll'asse stesso, ma che può scorrere in modo che il lungo *dito* ad esso congiunto è portato o nel piano della ruota f'' oppure in quello della ruota f'_1. Questo lungo *dito* può allora agire o sull'una o sull'altra di queste due ruote, facendola avanzare di un dente ad ogni rotazione del cilindro A_1, cioè ad ogni giro di manovella.

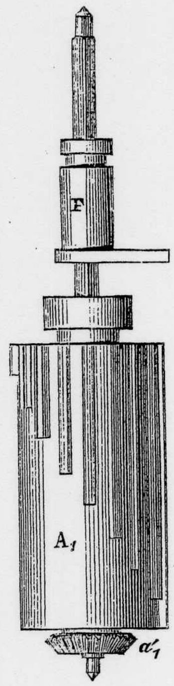


Fig. 665.

Il manicotto F è comandato dalla stessa spranghetta longitudinale K K (fig. 659) che sposta i manicotti a doppio rocchetto I_1, I_2,..... I_8 del commutatore, per mezzo di un prolungamento e'' che ripiegandosi all'ingiù viene ad abbracciare una scanalatura praticata verso l'estremità posteriore del manicotto F stesso; tale scanalatura è visibile nella fig. 665. Il *dito* fissato al manicotto F è così portato nel piano della ruota f'', quando il bottone N del commutatore è sul segno *Addizione-Moltiplicazione;* nel piano della ruota f'_1 quando il bottone N è sul segno *Sottrazione - Divisione.* Nel primo caso, ad ogni giro di manovella, la ruota f'' e quindi il quadrante E' in presa, ruotano di un dente in un certo senso; nel secondo caso, la ruota f'' e quindi anche il quadrante E', ruotano di un dente in verso contrario. Notisi però che la disposizione delle cifre segnate sui quadranti E' fa sì che il quadrante in presa colla ruota f'' conta sempre fino a 9 il numero dei giri dati dalla manovella motrice, in qualunque senso esso sia fatto girare dalla ruota f'' stessa. Una molletta j (figure 659 e 660) di acciajo, posta dietro la parete intermedia $\beta\beta$, la cui estremità libera passando attraverso ad un foro circolare praticato in questa parete viene ad incontrare i denti della ruota f'', impedisce che questa ruota, sotto l'azione del *dito* portato dal manicotto F, avanzi di più di un dente ad ogni giro di manovella.

La disposizione descritta del contatore dei giri della manovella motrice, oltre al facilitare notevolmente le varie operazioni che si possono eseguire coll'aritmometro, permette, come vedremo in seguito, di ottenere alle finestrelle minori E_1, E_2, ... E_7 tutte le successive cifre del risultato di una divisione o di una estrazione di radice. Essa offre eziandio il mezzo di correggere gli errori che si potrebbero commettere facendo dare alla manovella motrice un numero di giri maggiore o minore del necessario (2).

Bottoni per condurre a zero separatamente o simul-

(1) Non è che negli aritmometri che hanno più di 10 assi registratori, cioè più di 8 cilindri dentati, che si è obbligati eventualmente di trasmettere nel medesimo istante i riporti delle decine a due quadranti per volta.

(2) Tale meccanismo non esisteva nell'aritmometro presentato nel 1851 alla *Société d'encouragement*. Questa macchina presentava bensì una scanalatura graduata, sulla quale un indice veniva ad indicare il numero dei giri fatti dalla manovella motrice; ma questo numero spariva ad ogni operazione parziale, cosicchè, nella divisione ad es., era necessario che l'operatore prendesse nota dei numeri di giri successivamente inscritti. Il meccanismo che abbiamo descritto, quale trovasi negli attuali aritmometri, fu introdotto dal Thomas nel 1858.

taneamente tutti i quadranti minori. – I quadranti E_1', E_2, ... E_7' possono essere ricondotti allo zero o separatamente mercè i bottoni e_1, e_2, ... e_7 (fig. 655) fissi sul loro asse; oppure simultaneamente mediante il bottone G_2, che è manovrato dall'operatore colla mano destra, nel verso secondo cui ruotano le sfere di un orologio.

Questo bottone G_2, analogamente a quanto si è già detto per il bottone G_1, produce uno spostamento trasversale ed uno spostamento longitudinale in una lunga dentiera $p\,p$ (fig. 659), che trovasi al disotto della lastra mobile. Tale dentiera si avvicina dapprima e poscia agisce sui rocchetti e_1'', e_2'', ... e_7'' a 18 denti fissati inferiormente ai quadranti E_1', E_2', ... E_7', e mancanti del dente che corrisponde allo zero del quadrante. A questo modo, allorchè tutti questi quadranti minori sono arrivati allo zero si fermano. Rilasciando il bottone G_2, esso è fatto girare in verso contrario da una molla a spirale fissata sul suo asse (fig. 666), cosicchè la dentiera $p\,p$ è ricondotta alla posizione primitiva.

La dentiera $p\,p$, come la dentiera P P delle grandi finestrelle, è tenuta normalmente a tale distanza dai rocchetti e_1'', e_2'', ... e_7'', da non permettere ingranaggio

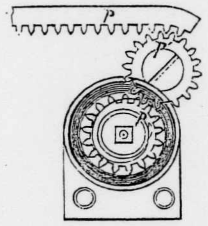


Fig. 666.

con essi che allorquando occorre di portare tutti i quadranti E_1', E_2', ... E_7' allo zero. Perciò, oltre allo spostarsi nel senso longitudinale, essa deve, al principio della sua corsa attiva, avvicinarsi ai rocchetti e'' tanto da produrre ingranaggio, ed al termine della sua corsa

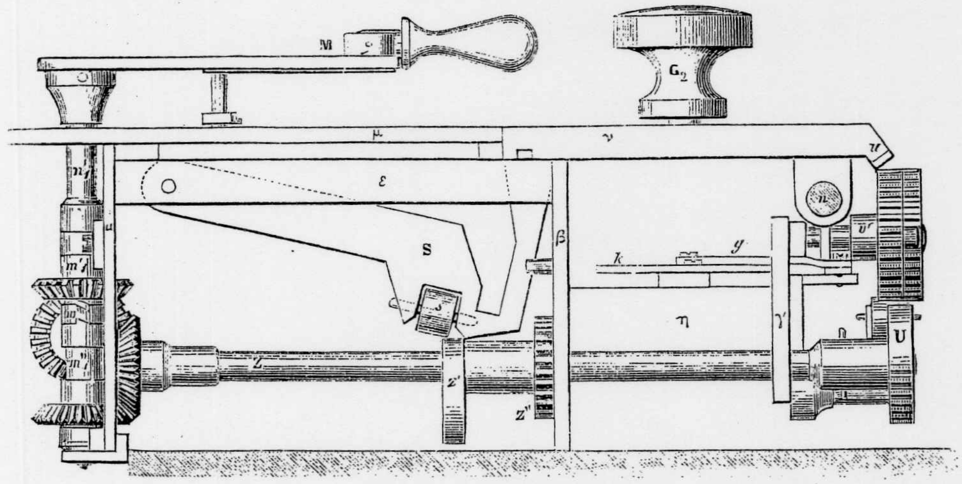


Fig. 667.

a vuoto allontanarsene nuovamente. Abbiamo già veduto come la cosa si ottenga per la dentiera P P; per la $p\,p$ il Thomas raggiunge lo stesso intento col mezzo di tre scanalature di forma conveniente (fig. 659) praticate entre piccole lastre portate dalla lastra mobile. In ciascuna di queste scanalature penetra un'asticciuola g' fissata alla dentiera $p\,p$.

Meccanismo adottato negli ultimi aritmometri a 10 cifre, per produrre lo spostamento della lastra mobile. — Nell'aritmometro a 6 cifre che abbiamo descritto, il sollevamento e lo spostamento longitudinale della lastra mobile è fatto a mano dall'operatore. Negli ultimi aritmometri a 10 cifre, tali movimenti sono prodotti in modo automatico dalla macchina stessa, con uno o più giri di manovella in verso contrario al verso della rotazione ordinaria: la lastra mobile si sposta allora verso destra se il bottone N del commutatore è disposto sul segno *Addizione-Moltiplicazione*, e verso sinistra se il bottone stesso è disposto sul segno *Sottrazione-Divisione.* Il meccanismo impiegato a tale intento è rappresentato nelle fig. 667, 668 e 669.

Nelle macchine in cui esiste questo meccanismo speciale, l'asse di rotazione n_1' della manovella motrice M (fig. 667) è sostenuto da due collari che gli permettono un leggiero spostamento nel senso longitudinale. Questi due collari sostengono eziandio i due manicotti cilindrici m_1', m_1'' ciascuno dei quali porta un rocchetto conico. L'albero n'_1 ruota entro questi due manicotti e, quando la sua rotazione è positiva, non produce che il movimento del manicotto superiore, mentre se la sua rotazione è negativa non produce che il movimento del manicotto inferiore. A tale scopo sull'albero n'_1 è fissato, fra i due manicotti m_1', m_1'', un piccolo anello m'' munito di due intagli triangolari disposti in senso inverso, in cui possono introdursi due sporgenze di forma corrispondente portate dai manicotti stessi; la distanza di queste due sporgenze è appena uguale all'altezza dell'anello m'' aumentata dalla profondità di un intaglio.

Ciò posto, quando la manovella motrice M ruota nel verso positivo, il manicotto inferiore m''_1 che, come vedremo, non può ricevere che la rotazione negativa, produce un piccolo sollevamento dell'albero n'_1. Allora la sporgenza del manicotto superiore m_1' s'introduce nell'intaglio corrispondente dell'anello m'', cosicchè il manicotto stesso col proprio rocchetto è posto in movimento, mentre il rocchetto inferiore rimane in riposo; in questo caso il moto della manovella motrice è comunicato all'albero longitudinale $n_1\,n_1$ che pone in rotazione tutti i cilindri parzialmente dentati.

Quando invece la rotazione impressa dall'operatore alla manovella motrice M è negativa, cioè si fa da destra verso sinistra, l'intaglio superiore dell'anello m'' preme contro il lato obliquo della sporgenza portata dal manicotto m'_1; siccome però questo manicotto non può ruotare nel verso negativo, produce un lieve abbassamento nell'albero motore n'_1, in conseguenza l'intaglio inferiore dell'anello m'' fa incastro colla sporgenza del manicotto inferiore m_1'', e produce la rotazione del rocchetto inferiore; questa rotazione è poi comunicata all'albero Z che comanda il meccanismo speciale atto a produrre il sollevamento e lo spostamento automatico della lastra mobile.

Sull'albero Z è calettato un eccentrico a disco z', e due rocchetti cilindrici z'' ed U. Il rocchetto z'' è dentato sull'intiero contorno, ed un nottolino la cui estremità libera penetra nei vani dei suoi denti, permette una sola rotazione nell'albero Z e quindi nel manicotto m_1''. La ruota dentata U porta 8 denti distribuiti sulla sola metà del suo contorno, come si vede nella fig. 668.

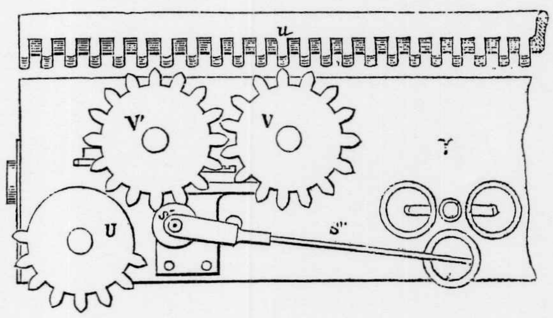


Fig. 668.

La rotazione dell'eccentrico z' produce, mediante la leva S, su cui agisce mercè il piccolo rullo s (fig. 667), il sollevamento della lastra mobile necessario perchè tutti gli ingranaggi conici dei varii quadranti siano resi indipendenti. In questa rotazione della lastra mobile, la dentiera ***u*** fissata obliquamente lungo lo spigolo posteriore della lastra stessa, entra in presa coll'una oppure coll'altra delle due ruote cilindriche V e V' (fig. 668), secondochè il bottone N del commutatore è disposto per l'*Addizione-Moltiplicazione*, ovvero per la *Sottrazione-Divisione*.

A tale scopo queste due ruote V e V' sono scorrevoli lungo i proprii assi di rotazione, ed una piccola leva x (fig. 669), munita di due piccoli cilindri che s'introducono entro due scanalature praticate nei manicotti scorrevoli delle due ruote, produce ad un tempo l'avvicinamento di una di queste ruote alla parete γ, e l'allontanamento dell'altra. Questa leva x è girevole attorno ad un asse equidistante dagli assi delle due ruote V e V', e riceve il movimento dalla spranghetta longitudinale K K del commutatore per mezzo della piccola biella articolata y. Notisi infine che gli spessori delle tre ruote U, V' e V sono determinati in modo che, malgrado lo spostamento prodotto dalla leva x, queste ruote sono costantemente in presa.

Suppongasi ora che la manovella motrice M faccia una rotazione nel verso negativo. Allora l'albero longitudinale che comanda tutti i cilindri parzialmente dentati rimane in riposo, mentre l'albero Z, e quindi l'eccentrico z' e la ruota U fanno una completa rivoluzione. L'eccentrico z', come abbiamo detto, innalza la lastra mobile; la ruota U fa avanzare di 8 denti in un certo senso la ruota V', e di 8 denti ancora, ma in senso contrario la ruota V. Secondochè il commutatore sarà disposto per l'addizione ovvero per la sottrazione, la dentiera u e quindi la lastra mobile si sposteranno di 8 denti verso destra o verso sinistra; il passo di questi denti è appunto determinato in modo che lo spostamento di 8 denti corrisponde all'intervallo fra due quadranti successivi. Ad ogni giro di manovella da destra verso sinistra, la lastra mobile avanza adunque di un posto nel verso conveniente, ed al termine di ciascuno spostamento parziale, l'eccentrico z' permette l'abbassamento della lastra stessa, sì che il dente T può introdursi

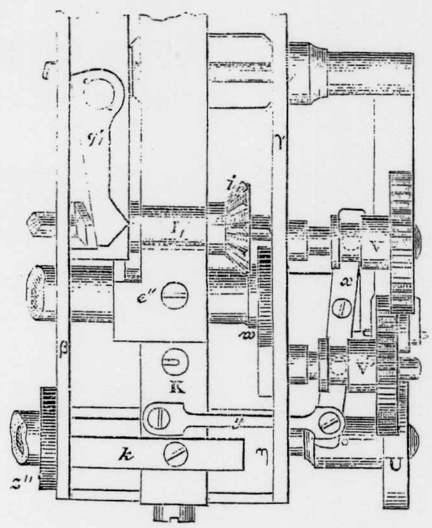


Fig. 669.

automaticamente in uno degli intagli $t_1, t_2, \ldots\ t_8$ della parete intermedia $\beta\beta$ della macchina; i bordi superiori di questi intagli, come già si è avvertito, sono alquanto arrotondati allo scopo di facilitare l'entrata di questo dente.

Un piccolo disco s' (fig. 668), girevole attorno ad un asse portato dall'estremo libero di una molla di acciajo s'', si appoggia contro i denti della ruota V', ed impedisce a questa di oltrepassare, per la forza viva acquistata, la posizione a cui è stata condotta dalla ruota U.

Nella disposizione che abbiamo descritta si è dovuto sopprimere il rocchetto a molla W rappresentato nella fig. 657, il quale permetteva la sola rotazione positiva della manovella motrice M. Però allo scopo di impedire ai cilindri parzialmente dentati di ruotare nel verso contrario a quello della loro rotazione normale, si è disposto un nuovo rocchetto a nottolino w (fig. 669) all'estremità dell'asse del primo cilindro parzialmente dentato A_1, e contro la parete posteriore $\gamma\gamma$ della macchina.

Completiamo la descrizione dell'ingegnosissima macchina ideata dal Thomas, con una breve leggenda delle varie figure che accompagnano la descrizione stessa.

Leggenda. — Aritmometro a 6 cifre.

Fig. 655. Projezione orizzontale dell'aritmometro (scala di $^4/_{11}$). La cassetta in cui è contenuto l'apparecchio è supposta aperta di fronte all'osservatore.

Fig. 656. Veduta prospettica dell'organo caratteristico dell'aritmometro.

Fig. 657. Sezione trasversale passante fra due cilindri consecutivi (scala di $^4/_5$). In questa sezione la lastra mobile è supposta alquanto rialzata.

Fig. 658. Quadrante superiore (scala di $^3/_4$).

Fig. 659. Projezione orizzontale dell'aritmometro supposta tolta la lastra fissa (scala di $^3/_4$). La lastra mobile essendo rialzata e ribaltata orizzontalmente, permette di scorgere il meccanismo da essa portato sulla sua faccia inferiore. In questa projezione non è segnata l'estremità di sinistra della lastra mobile.

Fig. 660. Sezione longitudinale determinata da un piano parallelo e vicinissimo alle fronti dei cilindri parzialmente dentati (scala di $^3/_4$). Questa sezione non rappresenta che le due estremità della macchina.

Fig. 661. Projezione verticale dell'estremità di sinistra dell'aritmometro (scala di $^4/_5$). Questa projezione fa vedere il meccanismo del commutatore.

Fig. 662. Estremità di sinistra, vista dal disotto, della dentiera che conduce a zero simultaneamente tutti i quadranti superiori (scala di $^4/_5$).

Fig. 663. Fronte di una delle leve oblique del meccanismo dei riporti (scala di $^3/_4$)

Fig. 664. Quadrante inferiore (scala di $^3/_4$).

Fig. 665. Projezione orizzontale del primo cilindro parzialmente dentato (scala di $^3/_4$).

Fig. 666. Estremità di destra, vista dal disotto, della dentiera che conduce a zero simultaneamente tutti i quadranti inferiori (scala di $^3/_4$).

I. — Lastra fissa di ottone, che ricopre i cilindri parzialmente dentati ed il meccanismo dei riporti.

II. — Lastra di vetro smerigliato che ricopre un vano libero sottostante; sulla medesima si possono scrivere i risultati o le formole da calcolarsi.

III. — Lastra mobile di ottone. Questa lastra si solleva ruotando attorno ad un asse longitudinale parallelo ed inferiore al suo bordo posteriore; essa può allora spostarsi a destra scorrendo lungo il medesimo asse.

$\alpha\,\alpha$ - Parete anteriore del meccanismo.

$\beta\,\beta$ - Parete intermedia.

$\gamma\,\gamma$ - Parete posteriore.

δ, δ - Spranghette cilindriche, che riuniscono le pareti anteriore ed intermedia verso la loro parte inferiore.

ε, ε - Spranghette prismatiche, che riuniscono le stesse pareti verso la loro parte superiore.

$\varkappa, \varkappa$ - Spranghette che riuniscono, a metà altezza, le pareti intermedia e posteriore.

μ, μ - Lastra fissa.

ν, ν - Lastra mobile.

$A_1, A_2, \ldots A_6$ - Cilindri parzialmente dentati. Questi cilindri ruotano sempre nello stesso verso, e la lunghezza dei loro denti decresce nel senso del movimento.

$B_1, B_2, \ldots B_6$ - Scanalature graduate, che servono per scrivere le cifre dei numeri su cui si opera.

$B_1', B_2', \ldots B_6'$ - Rocchetti cilindrici a 10 denti, che possono imboccare coi denti dei cilindri $A_1, A_2, \ldots A_6$; questi rocchetti sono scorrevoli lungo il proprio asse di rotazione, e ruotano sempre nello stesso verso.

$C_1, C_2, \ldots C_6$ - Bottoni ad indice, scorrevoli entro le scanalature graduate $B_1, B_2, \ldots B_6$, e che l'operatore, spostando a mano, fa scorrere di fronte alle cifre da inscriversi.

$D_1, D_2, \ldots D_{12}$ - Grandi finestrelle o finestrelle dei prodotti, a cui si leggono le somme ed i prodotti, ed a cui si inscrivono i dividendi.

$D'_1, D'_2, \ldots D'_{12}$ - Quadranti superiori, sottostanti alle grandi finestrelle $D_1, D_2, \ldots D_{12}$.

$E_1, E_2, \ldots E_7$ - Piccole finestrelle o finestrelle dei quozienti, a cui si registrano automaticamente i numeri dei giri dati dalla manovella motrice, ed a cui si leggono, in conseguenza, i moltiplicatori, i quozienti e le radici.

$E'_1, E'_2, \ldots E'_7$ - Quadranti inferiori a 18 denti, sottostanti alle piccole finestrelle $E_1, E_2, \ldots E_7$.

F - Manicotto girevole e scorrevole sull'asse del primo cilindro parzialmente dentato A_1. Questo manicotto porta un lungo *dito* che permette di registrare alle piccole finestrelle $E_1, E_2, \ldots E_7$ il numero dei giri fatti dalla manovella motrice.

G_1 - Bottone a molla, disposto alla sinistra della lastra mobile. Facendo girare da destra verso sinistra questo bottone, quando la lastra mobile è rialzata, tutti i quadranti superiori $D'_1, D'_2, \ldots D'_{12}$ sono portati simultaneamente allo zero.

G_2 - Bottone a molla disposto a destra della lastra mobile. Facendo girare da sinistra verso destra questo bottone, tutti i quadranti inferiori $E'_1, E'_2, \ldots E'_7$ sono portati simultaneamente allo zero.

H - Disco che non permette il movimento della leva motrice del commutatore, se non quando la manovella motrice è nella posizione iniziale.

K K - Spranghetta longitudinale del commutatore.

$I_1, I_2, \ldots I_8$ - Manicotti di ottone muniti di due rocchetti conici a 10 denti, che trasmettono il movimento dei cilindri parzialmente dentati $A_1, A_2, \ldots A_6$ ai quadranti superiori $D'_1, D'_2, \ldots$ quando la lastra mobile è abbassata. La rotazione di questi manicotti ha luogo sempre nello stesso verso, però essi imprimono ai quadranti superiori la rotazione positiva o la rotazione negativa, secondochè le ruote dentate dei quadranti stessi imboccano coi rocchetti conici anteriori o con quelli posteriori di questi manicotti. Lo spostamento dei manicotti necessario perchè abbia luogo l'inversione nel movimento dei quadranti, è prodotto dalla spranghetta K K del commutatore.

L - Leva motrice del commutatore.

L' - Seconda leva del commutatore.

M - Manovella motrice, la cui impugnatura si dispone orizzontalmente quando non si usa l'aritmometro, a fine di poter chiudere la cassetta. Questa manovella non può ruotare che nel verso secondo cui ruotano le sfere di un orologio.

N - Bottone del commutatore.

P P - Dentiera disposta al disotto della lastra mobile, e che conduce simultaneamente allo zero tutti i quadranti superiori $D_1, D_2, \ldots D_{12}$. Questa dentiera si manovra mediante il bottone G_1; essa si avvicina dapprima ai rocchetti cilindrici a 10 denti fissati al disotto di questi quadranti, e poscia ne produce la rotazione. Tale rotazione però cessa tostochè i quadranti sono condotti allo zero, poichè nei rocchetti cilindrici ora accennati manca il dente che corrisponde allo zero di ciascun quadrante.

P' - Rocchetto dentato fisso sull'asse del bottone G_1. Questo rocchetto imbocca colla dentiera P.

T - Dente fissato al disotto della lastra mobile, che non ne permette l'abbassamento se non quando essa occupa una delle posizioni in cui può aver luogo l'imbocco fra i varii rocchetti dentati.

W - Rocchetto cilindrico portato dall'albero di rotazione della manovella motrice M. Nei vani di questo rocchetto penetra l'estremità libera di un nottolino, il quale permette la sola rotazione positiva della manovella.

a_1, a_2, ... a_8 – Alberi a sezione quadrata, paralleli ed equidistanti fra di loro; i primi 6 di destra portano i cilindri parzialmente dentati A_1, A_2, ... A_6.

a'_1, a'_2, ... a'_8 – Rocchetti conici fissi sugli assi a_1, a_2, ... a_8, che trasmettono il movimento dell'albero motore longitudinale a tutti questi assi.

b_1, b_2, ... b_8 – Alberi a sezione quadrata paralleli ed equidistanti fra di loro, disposti in un piano superiore a quello degli alberi a_1, a_2, ... a_8; i primi 6 di destra portano i rocchetti cilindrici scorrevoli B'_1, B'_2, ... B'_6.

c – Laminette che congiungono i rocchetti B'_1, B'_2, ... B'_6 ai bottoni ad indice soprastanti C_1, C_2, ... C_6.

c' – Piccole molle fissate al disotto dei bottoni ad indice C_1, C_2, ... C_6. Queste molle penetrando entro ad oppositi vani praticati nella faccia inferiore della lastra mobile, lungo le scanalature graduate, B_1, B_2, ... B_6, servono ad assicurare la posizione dei bottoni stessi sopra ciascuna delle cifre segnate alle scanalature.

d_1, d_2, ... d_{12} – Bottoncini fissati sull'asse dei quadranti superiori D'_1, D'_2, ... D'_{12}, e che servono a condurre separatamente allo zero o ad un'altra cifra qualsiasi i quadranti stessi. Per manovrare i primi 8 di questi bottoncini è necessario di tenere sollevata la lastra mobile.

d'_1, d'_2, ... d'_{12} – Rocchetti conici a 10 denti, calettati sull'asse dei quadranti superiori D'_1, D'_2, ... D'_{12}. Questi rocchetti ricevono il movimento dai rocchetti conici anteriori o dai rocchetti conici posteriori portati dai manicotti scorrevoli I_1, I_2, ... I_8; nel primo caso i quadranti superiori ruotano per il verso positivo, nel secondo per il verso negativo.

d''_1, d''_2, ... d''_{12} – Rocchetti cilindrici a 10 denti, congiunti coi rocchetti conici d'_1, d'_2, ... d'_{12}. In questi rocchetti cilindrici manca il dente che corrisponde allo zero di ciascuno dei quadranti superiori D'_1, D'_2, ... D'_{12}.

e_1, e_2, ... e_7 – Bottoni fissati sull'asse dei quadranti inferiori E'_1, E'_2, ... E'_7, e che servono a condurre separatamente allo zero o ad un'altra cifra qualsiasi i quadranti stessi.

e'_1, e'_2, ... e'_7 – Vani praticati nella parete inferiore della lastra mobile, ed in cui penetra la ruota dentata che produce il movimento di uno dei quadranti inferiori E'_1, E'_2, ... E'_7.

e'' – Prolungamento inferiore della spranghetta K K del commutatore, che produce lo spostamento del manicotto F portato dall'albero e sezione quadrata del primo cilindro parzialmente dentato A_1.

e''_1, e''_2, ... e''_7 – Rocchetti cilindrici a 18 denti calettati sull'asse dei quadranti inferiori E'_1, E'_2, ... E'_7. I 18 denti corrispondono alle 18 cifre segnate sui quadranti stessi; però manca il dente che corrisponde alla cifra zero.

f – Albero di rotazione disposto direttamente al disopra del primo cilindro parzialmente dentato A_1.

f' – Albero di rotazione parallelo al precedente ed alquanto a destra.

f', f'' – Ruote cilindriche calettate sull'albero f. Allorchè la lastra mobile è abbassata, la ruota maggiore f'' penetra in uno dei vani e'_1, e'_2, ... e'_7, e produce il movimento di uno dei quadranti inferiori E'_1, E'_2, ... E'_7.

f'_1, f''_1 – Ruote cilindriche calettate sull'albero f_1. La minore f''_1 imbocca colla ruota uguale f' portata dall'albero f. Il lungo dito congiunto al manicotto F portato dall'albero del primo cilindro parzialmente dentato, è condotto, per mezzo del commutatore, o nel piano della ruota f'' od in quello della ruota f'_1. Nel primo caso, ad ogni giro di manovella quello dei quadranti inferiori E'_1, E'_2, ... E'_7 che è in presa colla ruota f'' avanza di un dente in un certo senso, nel secondo caso il quadrante stesso avanza di un dente in senso contrario; le cifre però, finchè non si oltrepassa il 9, appariscono alle piccole finestrelle sempre in ordine crescente.

g, g, g – Piccoli cilindri fissi alla lastra mobile, che guidano il movimento della dentiera PP.

g', g', g' – Piccoli cilindri che guidano il movimento della dentiera pp. Questi cilindri sono portati dalla dentiera stessa.

h – Lastrina portata dalla leva L del commutatore. Nello spostamento di questa leva la lastrina h passa nel piano del disco H e non può attraversare il disco stesso se non quando la manovella motrice occupa la posizione iniziale.

h' – Molletta di acciajo fissa alla spranghetta z, e che serve a fissare leggermente la leva L del commutatore nelle sue posizioni estreme.

h'' – Doppio piano inclinato congiunto alla leva L, su cui agisce l'estremità libera della molla h'.

i_1, i_2, ... i_8 – Rocchetti conici a 10 denti, fissati all'estremità anteriore dei manicotti I_1, I_2, ... I_8; questi rocchetti imboccano coi rocchetti conici d'_1, d'_2, ... d'_8 dei quadranti superiori, quando il bottone N del commutatore è disposto sul segno *Addizione-Moltiplicazione*.

i'_1, i'_2, ... i'_8 – Rocchetti conici a 10 denti, fissati all'altra estremità dei manicotti I_1, I_2, ... I_8. Questi rocchetti imboccano coi rocchetti conici d'_1, d'_2, ... d'_8 dei quadranti superiori, quando il bottone N del commutatore è disposto sul segno *Sottrazione-Divisione*.

j – Molla di acciajo, disposta dietro la parete intermedia 33 dell'apparecchio. L'estremità superiore di questa molla attraversa un'apertura circolare praticata nella parete 33, e si appoggia contro i denti della ruota f'' che produce il movimento dei quadranti inferiori E'_1, E'_2, ... E'_7. A questo modo la ruota f'' non può, sotto l'impulsione del *dito* portato dal manicotto F del primo cilindro parzialmente dentato A_1, ruotare di più di un dente ad ogni giro della manovella motrice M.

k, k – Piastrine, che limitano il movimento della spranghetta K K del commutatore.

l – Biella incurvata, che congiunge le due leve L ed L' del commutatore.

l' l' – Albero longitudinale del commutatore.

l'', l'' – Bracci portati dall'albero l' l'. Questi due bracci attraversano due forellini oblunghi praticati verso le estremità della spranghetta K K del commutatore e producono lo spostamento trasversale della spranghetta stessa.

m_1, m_2, ... m_8 – Settori di moderazione girevoli e scorrevoli sugli assi a_1, a_2, ... a_8. Ciascuno di questi settori, il primo eccettuato, porta il *dito* destinato al riporto delle decine.

$m'_1, m'_2, \dots m'_8$ - Ruote stellate moderatrici fissate sugli assi $b_1, b_2, \dots b_8$. Sui medesimi assi e posteriormente alle ruote moderatrici sono fissati i rocchetti cilindrici a 10 denti per il riporto delle decine. Le ruote stellate lasciano passare, con un piccolo giuoco, il contorno semi-cilindro dei settori di moderazione $m_1, m_2, \dots m_8$.

$n\,n$ - Albero di rotazione della lastra mobile.

n', n' - Spranghette che collegano l'albero di rotazione $n\,n$ alla lastra mobile.

n'', n'' - Spranghette fissate nella parete posteriore $\gamma\gamma$ della macchina, entro le quali può scorrere l'albero di rotazione $n\,n$ della lastra mobile.

$n_1\,n_1$ - Albero motore longitudinale, che trasmette il movimento della manovella motrice M a tutti gli alberi $a_1, a_2, \dots a_8$.

n'_1 - Albero di rotazione della manovella motrice M.

$p\,p$ - Dentiera disposta al disotto della lastra mobile, e che conduce simultaneamente allo zero tutti i quadranti inferiori $E'_1, E'_2, \dots E'_7$. Questa dentiera si manovra mercè il bottone di destra G_2; essa si avvicina dapprima ai rocchetti cilindrici a 18 denti $e''_1, e''_2, \dots e''_7$ fissati al disotto di questo quadrante, e poscia ne produce la rotazione. Tale rotazione però cessa allorquando i quadranti sono condotti allo zero, poichè nei rocchetti cilindrici a 18 denti manca il dente che corrisponde allo zero di ciascun quadrante.

p' - Rocchetto cilindrico, che imbocca colla dentiera $p\,p$.

p'' - Rocchetto cilindrico calettato sull'asse del bottone G_2. Questo rocchetto comanda il rocchetto p' e quindi la dentiera p.

$q_1, q_2, \dots q_{12}$ - Denti di acciajo fissati al disotto dei quadranti superiori, $D'_1, D'_2, \dots D'_{12}$, sul raggio che passa fra le cifre 0 e 9. Questi denti comandano il meccanismo dei riporti.

$q'_1, q'_2, \dots q'_7$ - Leve mobili attorno ad assi disposti sopra di una lastra fissata alla parete intermedia $\beta\beta$. Sull'estremità di queste leve, tagliata a doppio piano inclinato, agiscono i denti $q_1, q_2, \dots q_{12}$ allorquando la lastra mobile è abbassata ed alle grandi finestrelle si passa dal 9 allo 0.

$q''_1, q''_2, \dots q''_7$ - Leve oblique del meccanismo dei riporti. Queste leve, sotto l'azione delle precedenti $q'_1, q'_2, \dots q'_7$, subiscono un piccolo spostamento trasversale.

$r_1, r_2, \dots r_7$ - Assi di rotazione che, manovrati dalle leve oblique $q'_1, q'_2, \dots q'_7$, spostano il lungo dito congiunto ai settori di moderazione $m_2, m_3, \dots m_8$. Allorquando i quadranti superiori passano dal 9 allo 0, questo dito è portato nel piano dei rocchetti cilindrici fissi sugli assi $b_1, b_2, \dots b_8$, e quindi, facendo avanzare di un dente i rocchetti stessi, eseguisce automaticamente i riporti delle decine.

r'' - Piccoli denti fissati alla parete intermedia $\beta\beta$. Questi denti agiscono sulla superficie elicoidale secondo cui terminano posteriormente i settori di moderazione $m_1, m_2, \dots m_8$, riconducendo alla primitiva posizione i settori stessi e per conseguenza gli assi $r_1, r_2, \dots r_8$ e tutte le leve del meccanismo dei riporti.

$t_1, t_2, \dots t_8$ - Intagli praticati nella parete intermedia $\beta\beta$ al disopra degli assi $b_1, b_2, \dots b_8$. Allorquando la lastra mobile occupa le posizioni convenienti, il dente T penetra in uno di questi intagli.

Leggenda. — *Aritmometro a 10 cifre, in cui lo spostamento della lastra mobile è ottenuto in modo automatico.*

Fig. 667. Projezione verticale dell'estremità di destra dei nuovi aritmometri a 10 cifre (scala di $^3/_4$).

Fig. 668. Fronte degli ingranaggi che producono lo spostamento automatico della lastra mobile (scala di $^3/_4$).

Fig. 669. Projezione orizzontale dei medesimi ingranaggi (scala di $^3/_4$).

S - Leva che produce il sollevamento della lastra mobile.

U - Ruota cilindrica ad 8 denti distribuiti sulla sola metà della circonferenza; essa produce lo spostamento longitudinale della lastra mobile.

V, V' - Ruote cilindriche uguali fra di loro, che ricevono movimento di verso contrario dalla ruota U.

Z - Albero di rotazione che comanda il meccanismo speciale atto a produrre il movimento automatico della lastra mobile.

m'' - Anello ad intagli triangolari fissato sull'asse di rotazione n'_1 della manovella motrice M.

m'_1 - Manicotto superiore entro il quale può spostarsi longitudinalmente l'albero n'_1 della manovella motrice M. Questo manicotto porta un rocchetto conico che comanda l'albero motore longitudinale $n_1\,n_1$ dell'aritmometro; esso non riceve il movimento che allorquando la manovella motrice ruota nel verso positivo, cioè nel senso secondo cui ruotano le sfere di un orologio.

m''_1 - Manicotto inferiore dell'albero n'_1. Il rocchetto conico di questo manicotto comanda l'albero Z e non riceve il movimento che allorquando la manovella motrice ruota nel verso negativo.

s - Rullo congiunto alla leva S.

s' - Disco frenatore che agisce contro i denti della ruota V'.

s'' - Molla di acciajo che porta il disco s'.

u - Dentiera disposta obliquamente lungo lo spigolo posteriore della lastra mobile.

w - Rocchetto munito di nottolino, fisso sull'asse del primo cilindro parzialmente dentato A_1 allo scopo di non permetterne che la rotazione in un solo senso.

x - Piccola leva che produce lo spostamento simultaneo delle due ruote V e V'.

y - Biella che congiunge la spranghetta KK del commutatore colla leva x.

z' - Eccentrico a disco, calettato sull'albero Z. Questo eccentrico agisce, mercè il rullo s, sulla leva S che produce il sollevamento della lastra mobile.

z'' - Rocchetto cilindrico munito di nottolino, che impedisce la rotazione inversa dell'albero Z.

Pratica dell'aritmometro. — Da quanto si è veduto, possiamo dedurre facilmente il modo di impiegare l'aritmometro nei varii calcoli.

Proprietà fondamentali dell'aritmometro. — Gioverà anzitutto riassumere le proprietà fondamentali di questa macchina, riferendoci sempre all'aritmometro a 6 cifre che abbiamo descritto.

1° *Se il commutatore è disposto per l'addizione e le grandi finestrelle sono allo zero, rappresentando alle scanalature un numero qualunque che non abbia più di 6 cifre, con un semplice giro di manovella* *questo numero apparisce alle finestrelle maggiori; con 2, 3, 4,.... n giri, appariscono successivamente il doppio, il triplo, il quadruplo, ... l'ennuplo dello stesso numero. Quest'operazione può essere continuata finchè il multiplo ottenuto non ha più di 8 cifre;*

2° *Se ad ogni giro di manovella cangiasi il numero rappresentato alle scanalature, il numero finale che apparisce alle grandi finestrelle è la somma di tutti i numeri inscritti successivamente coi bottoni ad indice;*

3° *Se dopo di aver inscritto un numero alle grandi finestrelle, si dispongono i bottoni ad indice in modo da rappresentare un altro numero minore del precedente, e si colloca il commutatore per la sottrazione, un secondo giro di manovella farà apparire la differenza fra il primo ed il secondo numero: un terzo, un quarto..... giro, la differenza fra il primo ed il doppio, il triplo, ... del secondo; supposto sempre che questo multiplo sia minore del primo numero.*

Come dev'essere disposto l'aritmometro prima d'incominciare un'operazione. — In tutte le operazioni, o serie di operazioni, è necessario di partire coll'aritmometro a zero, cioè coi bottoni ad indice delle scanalature, colle finestrelle maggiori, e colle finestrelle minori allo zero. Ove così non fosse, si dovrà portare anzitutto in tale posizione, spostando separatamente i varii bottoni ad indice, e valendosi, per le finestrelle, o dei bottoncini annessi a ciascun quadrante ovvero dei due bottoni estremi che comandano le due serie di quadranti. È da ricordarsi però, che per produrre il movimento dei due bottoni estremi, e dei bottoncini che comandano i primi 8 quadranti superiori di destra, devesi tenere sollevata la lastra mobile.

Modo di inscrivere un numero dato alle grandi finestrelle. — Distingueremo tre casi:

1° Se il numero proposto non ha più di 6 cifre, converrà, quasi sempre, seguire il procedimento generale: cioè inscrivere dapprima questo numero alle scanalature, e poscia, disposto il commutatore per la somma, dare un giro alla manovella motrice. Qualche volta però, come succede ad es. nella sottrazione, riescono più spedite le operazioni successive manovrando a mano i bottoncini dei primi 6 quadranti di destra, dopo di aver sollevata la lastra mobile.

2° Se si tratta di un numero avente più di 6 cifre, si potrà inscriverne le varie cifre coi bottoncini dei quadranti, tenendo, per i primi 8 di destra, sollevata la lastra mobile. La cosa si può anche ottenere in modo più spedito, inscrivendo ad un tempo, col procedimento generale, tutta la parte formata dalle prime 6 cifre di destra, e poscia manovrando a mano i bottoncini dei quadranti successivi di sinistra; per i due primi di questi quadranti la lastra mobile deve essere sollevata. Coll'uno o coll'altro di questi procedimenti si potrà, coll'aritmometro in discorso, rappresentare alle grandi finestrelle qualsiasi numero che non abbia più di 12 cifre.

3° Se infine il numero proposto ha più di 6 cifre, ma quelle che seguono le prime 6 sono zeri, si potrà applicare il procedimento indicato nel primo caso, spostando però la lastra mobile di un numero conveniente di posti a sinistra. Se, ad es., si tratta di inscrivere alle grandi finestrelle il numero 378565000, portato l'aritmometro a zero, si sposterà la lastra mobile di tre posti a destra. Poscia, disposto il commutatore per la somma, si inscrive alle scanalature il numero 378565, e si dà un giro alla manovella motrice.

Addizione. — Debbasi, ad es., eseguire la somma:

434787 + 39452 + 75364 + 362.

1° Si porta l'aritmometro a zero.

2° Si dispone il commutatore per la somma.

3° Si inscrive il primo numero dato 434787 alle scanalature, incominciando da destra, e si dà un giro alla manovella motrice: il numero si riproduce alle grandi finestrelle.

4° Si inscrive alle scanalature il secondo numero 39452, e si dà un secondo giro di manovella: questo secondo numero si riproduce alle grandi finestrelle, aggiungendosi automaticamente a quello che vi figurava prima, per modo che si ottiene la somma 474239 dei due primi numeri dati.

5° Si inscrive alle scanalature il terzo numero dato 75364, e si dà ancora un giro di manovella: si ha la somma 549603 dei tre primi numeri.

6° Così per il quarto, e per altri se ve ne fossero, finchè il totale non ha più di 8 cifre. La somma 549965 di tutti i numeri proposti si ottiene inscritta alle grandi finestrelle, mentre alle piccole finestrelle apparisce il numero 4 dei giri di manovella, cioè il numero delle poste sommate. In tal modo l'operatore può assicurarsi se ha veramente addizionati tutti i numeri proposti.

Trattandosi di sommare numeri decimali, il procedimento non cambia, avvertendo però di ridurre i numeri proposti ad avere lo stesso numero di cifre decimali, coll'aggiunta di un numero conveniente di zeri. Così se i numeri da sommarsi fossero: 15.07; 752.2; 435.159; 0.156, si inscriveranno successivamente alle scanalature i numeri 15070; 752200; 435159; 156. Uno spillo d'avorio infisso nel forellino che sta fra la 3ª e la 4ª finestrella, servirà per separare, tanto per i numeri dati come per la somma ottenuta, la parte intiera dalla parte decimale.

Prova dell'addizione. — Nell'eseguire una somma coll'aritmometro, gli errori non possono provenire che dall'operatore, o per l'omissione di alcuno dei numeri da sommarsi, oppure per qualche sbaglio nell'inscrivere alle scanalature i numeri dati.

La prima causa d'errore può facilmente essere eliminata e corretta, quando l'operatore verifichi alle piccole finestrelle se il numero dei giri di manovella è uguale a quello dei numeri da sommarsi.

Riguardo alla seconda, potrà riescire conveniente, specialmente trattandosi di lunghe somme, di procedere ad una prova, operazione a cui si presta benissimo l'aritmometro.

Eseguita, come si è accennato, la somma di più numeri, lasciando l'aritmometro nell'ultima sua posizione, cioè colla somma alle grandi finestrelle e l'ultima posta alle scanalature, si dispone il commutatore per la sottrazione e si dà un giro di manovella: apparirà alle grandi finestrelle la somma di tutti i numeri meno l'ultimo. Si scrive alle scanalature il penultimo numero, e si dà un giro di manovella: si troverà la somma di tutti i numeri meno i due ultimi. Si continua in tal modo finchè si sono tolti successivamente dal totale tutti i numeri dati: tutte le finestrelle dovranno allora essere ricondotte allo zero.

In una somma di molti numeri converrà, nell'operazione diretta, notare sul vetro smerigliato che trovasi a sinistra della lastra fissa, i successivi totali, ad es. ad ogni 10 addizioni successive. Questi totali dovranno poi ritrovarsi nella prova, in ordine inverso, ad ogni 10, 20,... giri di manovella. In tal modo si potrà circoscrivere l'errore in questi intervalli, e procedere alla verifica ed alla correzione.

Sottrazione. — Ecco le operazioni da eseguirsi per ottenere la differenza fra due numeri:

1° Si porta l'aritmometro a zero.

2° Si inscrive il minuendo alle grandi finestrelle. La cosa può ottenersi col metodo ordinario, inscrivendolo prima alle scanalature, e dando un giro di manovella, essendo il commutatore disposto per la somma. Converrà però in questo caso muovere separatamente i bottoncini annessi ai singoli quadranti, tenendo, per i primi 8 quadranti di destra, sollevata colla mano sinistra la lastra mobile.

3° Si dispone il commutatore per la differenza.

4° Si inscrive il sottraendo alle scanalature, e si dà un giro alla manovella motrice: il resto cercato apparisce allora alle grandi finestrelle.

Prova della sottrazione. — Lasciando l'aritmometro nell'ultima sua posizione, cioè col resto alle grandi finestrelle, ed il sottraendo alle scanalature, si dispone il commutatore per la somma, e si dà un terzo giro di manovella. In tal modo al resto si aggiunge il sottraendo, e perciò alle finestrelle maggiori deve riprodursi il minuendo.

Somma algebrica. — Trattandosi di una somma algebrica, si sommeranno dapprima tutti i numeri positivi. Poscia, disposto il commutatore per la differenza, si inscriveranno successivamente tutti i numeri negativi alle scanalature, facendo dare dopo ciascuna inscrizione un giro alla manovella motrice.

La sottrazione successiva di questi numeri negativi non potrà effettuarsi intieramente che nel caso in cui la loro somma è minore di quella dei numeri positivi. La macchina stessa indica quando non è più possibile di continuare la sottrazione, perchè appena che uno dei numeri da sottrarsi è maggiore dell' ultimo resto, il giro di manovella porta immediatamente tutte le grandi finestrelle alla cifra 9.

Moltiplicazione. — Coll'aritmometro si evitano i calcoli mentali e si allontanano le cause di errore. Però, avuto riguardo alla rapidità delle operazioni, si può dire immediatamente che nella somma e nella sottrazione esso non supera in celerità un calcolatore di abilità comune (1). Nella moltiplicazione invece e nella divisione, la sua convenienza è considerevole sotto ogni riguardo.

Supponiamo in primo luogo che si tratti di un moltiplicatore di una sola cifra. Allora, disposto il commutatore per la somma, si inscrive il moltiplicando alle scanalature, e si danno tanti giri di manovella quante sono le unità contenute nel moltiplicatore: alle grandi finestrelle apparirà il prodotto cercato, e nella prima finestrella inferiore rimarrà inscritto il moltiplicatore.

Trattandosi di un moltiplicatore di più cifre si potrebbe applicare lo stesso procedimento; è chiaro però che il più delle volte l'operazione riescirebbe lunghissima ed impraticabile. Tuttavia il risultato può ottenersi assai facilmente, imitando, collo spostamento della lastra mobile, quanto si fa nell'operazione aritmetica spostando i successivi prodotti parziali.

Ecco il procedimento semplicissimo che si deve seguire. Si cerchi, ad es., il prodotto:

$$318753 \times 872.$$

1° Si porta l'aritmometro a zero.

2° Si dispone il commutatore per l'addizione.

3° Si scrive il moltiplicando 318753 alle scanalature, e si danno tanti giri di manovella quante sono le unità contenute nella prima cifra del moltiplicatore, cioè 2: alle grandi finestrelle apparisce il primo prodotto parziale 637506, ed alla prima finestrella inferiore la prima cifra 2 del moltiplicatore (fig. 670).

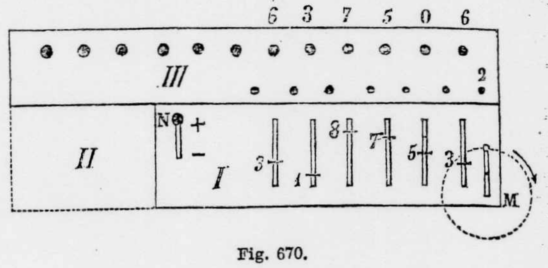


Fig. 670.

4° Colla mano sinistra si solleva leggermente la lastra mobile e la si sposta di un posto a destra, in modo che la finestrella delle decine prenda il posto di quella delle unità, e colla mano destra si danno tanti giri di manovella quante sono le unità della cifra delle decine nel moltiplicatore, cioè 7. In tal modo il secondo prodotto parziale si forma, e contemporaneamente si aggiunge al primo già ottenuto, cominciando dalle decine, precisamente come nell'eseguire l'operazione col metodo ordinario: alle grandi finestrelle apparisce la somma 22950216 dei due primi prodotti parziali. La seconda cifra 7 del moltiplicatore è registrata intanto alla seconda delle piccole finestrelle (fig. 671).

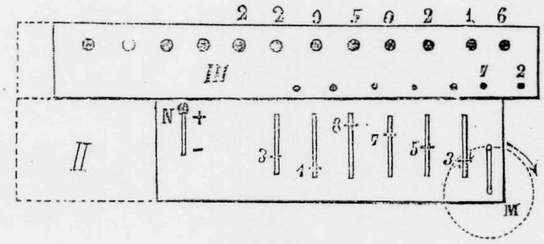


Fig. 671.

5° Si fa avanzare di un nuovo posto a destra la lastra mobile, e si imprime alla manovella un numero di giri eguale alle unità della terza cifra, 8, del moltiplicatore. Si ottiene così alle grandi finestrelle la somma dei tre successivi prodotti parziali, cioè il prodotto cercato 277952616, mentre le cifre del moltiplicatore 872 sono andate man mano inscrivendosi alle piccole finestrelle (fig. 672).

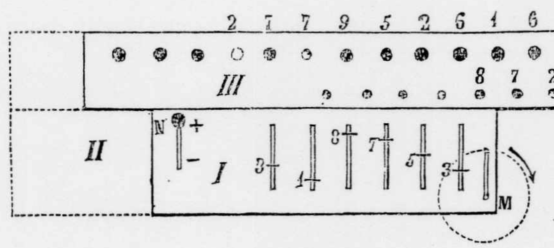


Fig. 672.

(1) Questo fatto proviene dalla necessità di spostare i bottoni ad indice per inscrivere alle scanalature le successive cifre dei numeri da sommarsi. Se tale inscrizione si potesse ottenere col solo toccare col dito i diversi bottoni, senza che occorresse spostarli in determinate posizioni, si avrebbe certamente un notevole risparmio di tempo. Questo perfezionamento, suggerito dal Benoit, fu più volte tentato da Thomas di Dojano; ma finora non fu ottenuto in modo soddisfacente.

L'operazione non cambia trattandosi di numeri decimali, avvertendo di separare nel prodotto ottenuto un numero di cifre decimali eguale alla somma dei numeri delle cifre decimali dei fattori.

Abbiamo veduto come nell'eseguire la moltiplicazione si proceda prendendo le successive cifre del moltiplicatore cominciando dalla destra. Importa però notare che non è necessario di seguire quest'ordine, e che si possono considerare le cifre del moltiplicatore sia incominciando dalla sinistra, sia anche da una cifra qualunque intermedia, purchè la lastra mobile sia spostata nella posizione corrispondente ad ogni fattore. Ne consegue che, se l'operatore dopo di aver fatto l'operazione nel modo indicato, osservando le piccole finestrelle a cui appare il moltiplicatore, si accorge che è successo qualche errore per aver dato sopra qualche cifra del moltiplicatore uno o più giri di manovella in più od in meno, può correggere il risultato senza che occorra rifare tutta l'operazione. Se, ad es., nel fare il prodotto parziale relativo ad una certa cifra ha dato un giro di meno, non dovrà fare altro che spostare la lastra mobile nella posizione corrispondente a questa cifra e dare il giro mancante di manovella. Se invece si è dato un giro di più, trasportata la lastra mobile e disposto il commutatore per la sottrazione, si darà un nuovo giro di manovella, con che rimarrà rettificato l'errore commesso. Notisi però che il meccanismo dei riporti non si estende che ai due quadranti che precedono le 6 scanalature graduate, e che perciò in certi casi non sarà possibile fare la correzione nel modo indicato.

Trattandosi di fare il prodotto di più di due fattori, si eseguisce l'operazione successivamente, moltiplicando i due primi, poscia il primo prodotto ottenuto per il terzo fattore, e così via.

Il numero delle grandi finestrelle, 12 nel nostro caso, indica il massimo numero delle cifre che potrà avere il prodotto ottenuto coll'aritmometro, e quindi costituisce un elemento caratteristico della sua potenza. Il numero delle cifre di un prodotto di 2 interi è uguale alla somma delle cifre dei fattori, ed in certi casi a questa somma diminuita di 1. Se i fattori adunque sono 2 soli, sarà possibile, coll'aritmometro a 6 cifre, moltiplicare fra loro 2 numeri di 6 cifre ciascuno, o uno di 7 per uno di 5, o tutto al più, in certi casi, un numero di 7 cifre per uno di 6. In questo ultimo caso il moltiplicando sarà il numero di 6 cifre, perchè vi sono 6 sole scanalature.

Moltiplicazione di numeri aventi più di 6 cifre. — Ove si trattasse di un prodotto avente più di 12 cifre, si può usare ancora assai convenientemente l'aritmometro, ricorrendo all'artifizio di scomporre ognuno dei fattori in altri che non abbiano più di 6 cifre.

Supponiamo che si tratti di 2 soli fattori, e consideriamo il caso estremo in cui abbiano 12 cifre ciascuno, come ad es:

$$153781635831 \times 987752321445.$$

Tale prodotto può scriversi in quest'altro modo:

$$(153781000000 + 635831) \times$$
$$\times (987752000000 + 321445).$$

Ossia, eseguendo il prodotto dei due binomii:

$$(153781 \times 987752) \times 10^{12} +$$
$$+ (153781 \times 321445) \times 10^{6} +$$
$$+ (635831 \times 987752) \times 10^{6} +$$
$$+ (635831 \times 321445).$$

A questo modo, il prodotto è trasformato in quattro altri ove i fattori hanno sei sole cifre, e che si possono quindi eseguire separatamente sull'aritmometro. Ottenuti questi quattro prodotti, si sommano, aggiungendo al primo 12 zeri, al secondo ed al terzo 6 zeri; si fa cioè la somma

$$\begin{array}{r} 151897490312000000000000 \\ 49432133545000000 \\ 628043341912000000 \\ 204384695795 \\ \hline 151898167787679841695795 \end{array}$$

Divisione. — La divisione è una sottrazione abbreviata, che ha per oggetto di far conoscere quante volte un numero è contenuto in un altro; e chi eseguisce nel modo ordinario una divisione, sottrae effettivamente il divisore dal dividendo finchè si ottenga un resto zero o minore del divisore. Coll'aritmometro l'operazione si eseguisce in modo affatto analogo.

Notiamo anzitutto che la divisione fra due numeri decimali, si riduce sempre a quella di due numeri intieri, portando i due numeri dati ad avere lo stesso numero di cifre decimali, e facendo astrazione dalla virgola. Allorquando poi la divisione fra due numeri interi non riesce esatta, e si vuole ottenere al quoziente un certo numero di cifre decimali, basta aggiungere al dato dividendo un numero di zeri eguale al numero delle cifre decimali che si vogliono ottenere nel quoziente, e separare poi in questo il numero richiesto di cifre decimali.

Ricordate queste due regole, vediamo come si possa eseguire coll'aritmometro la divisione di due numeri dati, supponendo ad esempio che vogliasi ridurre la frazione ordinaria:

$$\frac{327}{1479},$$

in decimale, e che si richieda il quoziente con tre cifre decimali. Dovremo adunque dividere 327000 per 1479.

1° Si porta l'aritmometro a zero.

2° Si inscrive il dividendo 327000 alle grandi finestrelle, ed il divisore 1479 alle scanalature, partendo da destra.

3° Si dispone il commutatore per la divisione.

4° Si osserva quante sono le cifre di sinistra del dividendo che è d'uopo considerare, affinchè il divisore vi possa essere contenuto: nel nostro caso occorre considerare il gruppo 3270. Si solleva e si fa scorrere a destra la lastra mobile, finchè la prima cifra 0 a destra di questo primo dividendo parziale, sia direttamente sopra la cifra 9 delle unità del divisore: nell'esempio in questione la lastra mobile dovrà essere spostata di due posti. Si fa poscia girare la manovella motrice: ad ogni giro di questa il divisore 1479 è sottratto dal dividendo parziale 3270, mentre il numero dei giri va registrandosi ad una delle piccole finestrelle. Si arresta il moto della manovella allorchè il primo dividendo parziale è ridotto ad essere minore del divisore. Nel nostro caso bastano 2 giri di manovella, poichè dopo il secondo giro si ha il resto 312. Il numero 2 dei giri dati, rappresenta la prima cifra del quoziente, e trovasi registrata nella corrispondente piccola finestrella.

5° Si fa rientrare di un posto la lastra mobile, a fine di considerare un nuovo dividendo parziale 3120 maggiore del divisore, e si opera come precedentemente, imprimendo alla manovella tanti giri finchè alle grandi finestrelle il secondo dividendo parziale sia ridotto ad un resto minore del divisore. Occorreranno altri due giri, dopo dei quali si ha il resto 162, mentre il 2, seconda cifra del quoziente, rimane registrata nelle piccole finestrelle accanto ed alla destra della cifra già ottenuta.

6° Allo stesso modo si prosegue, facendo rientrare la lastra mobile di un posto per volta, finchè siansi considerate tutte le cifre del dividendo. Nel nostro esempio, fatta rientrare la lastra di un posto, e considerato l'ultimo dividendo parziale 1620, con un solo giro di manovella si ottiene alle grandi finestrelle il resto finale 141. Il quoziente 221 si troverà tutto inscritto alle piccole finestrelle. Possiamo adunque concludere che:

$$\frac{327}{1479} = 0.221 \text{ circa.}$$

Notiamo che se nell'eseguire la divisione è successo qualche errore, chi opera ne è immediatamente avvertito dalla macchina stessa. Ed invero, se in una delle sottrazioni dai successivi dividendi parziali si fa un giro di manovella in meno del necessario, in conseguenza del che si ottiene un resto maggiore del divisore, quando si considera poi il successivo dividendo parziale si sarà obbligati di dare più di 9 giri. Si vedono allora alla piccola finestrella a cui si dovrebbe inscrivere l'attuale cifra del quoziente, apparire le cifre in ordine decrescente. Avvertiamo però che la rettifica del quoziente non si fa da sè, perchè i quadranti delle finestrelle inferiori essendo indipendenti fra di loro non eseguiscono i riporti. Se invece si è dato un giro di più del necessario, si vedrà apparire successivamente a tutte le grandi finestrelle la cifra 9, il che indica che da un certo numero si è voluto sottrarne un altro maggiore. Basterà in questo caso disporre il commutatore per l'addizione, e dare un giro di manovella, perchè l'errore sia rettificato; ritornando poscia il commutatore alla posizione primitiva, l'operazione può essere continuata.

Prova della divisione. — La prova della divisione si farà moltiplicando il divisore, attualmente inscritto alle scanalature, per il quoziente; lasciando, come si è trovato, l'ultimo resto alle grandi finestrelle, questo si somma automaticamente al prodotto, cosicchè si deve riprodurre il dividendo dato.

Estrazione della radice quadrata. — Anche l'estrazione della radice quadrata si fa assai rapidamente usando l'aritmometro. Essa può eseguirsi o col procedimento comune, che consiste in una serie di divisioni e sottrazioni successive, oppure con un altro procedimento, non seguìto nel calcolo ordinario, ma che applicato coll'aritmometro permette di fare l'operazione colla massima speditezza. Noi parleremo successivamente di questi due procedimenti.

Notiamo anzitutto che se la radice quadrata di un numero intiero non è intiera, e deve essere calcolata con un certo numero di cifre decimali, è d'uopo aggiungere alla destra del numero dato tante coppie di zeri quante sono le cifre decimali che si vogliono avere alla radice. Se poi il numero proposto fosse decimale, l'operazione si riduce al caso dei numeri intieri, rendendone pari il numero delle cifre decimali, ed aggiungendo ancora, ove sia del caso, tante coppie di zeri finchè la parte decimale del numero dato contenga un numero di cifre doppio del numero di cifre decimali che deve avere la radice.

I. *Primo procedimento.* — Supponiamo che si debba calcolare:

$$\sqrt{915348.5},$$

e che si richiedano due cifre decimali alla radice.

1° Si porta l'aritmometro a zero.

2° Si inscrive il numero 91' 53' 48' 50' 00 alle grandi finestrelle, sollevando la lastra mobile e manovrando a mano i bottoncini annessi ai varii quadranti. Si divide il numero proposto, partendo da destra, in gruppi di 2 cifre; il primo gruppo di sinistra potrà anche avere una sola cifra. Il numero dei gruppi che così si ottiene, nel nostro caso 5, ci dà il numero delle cifre nella radice cercata. Si considerano a destra tante scanalature quante sono queste cifre della radice: nel nostro esempio dobbiamo considerare 5 scanalature, che indicheremo colle lettere B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 (fig. 655) partendo da destra.

3° Si dispone il commutatore per la differenza.

4° Si solleva la lastra mobile, spostandola verso destra tantochè la seconda cifra 1 del primo gruppo sia sulla prima scanalatura considerata di sinistra B_5. Si cerca mentalmente quale è il massimo quadrato intiero contenuto nel primo gruppo; nel nostro caso è 81, la cui radice è 9. Questa prima cifra 9 della radice si indica col bottone della scanalatura B_5. Si danno alla manovella motrice tanti giri quante sono le unità di questa cifra: si vedrà allora comparire ad una delle piccole finestrelle la cifra 9, mentre dal primo gruppo 91 si sottrae il quadrato della medesima, cosicchè a questo primo gruppo si sostituisce la differenza 10 fra esso ed il quadrato 81 della prima cifra della radice.

5° Si considera il gruppo successivo 53 e si fa rientrare di un posto la lastra mobile. Si raddoppia mentalmente la prima cifra 9 della radice, e questo doppio si rappresenta col bottone della scanalatura B_5, servendosi, ove occorra, anche della scanalatura consecutiva di sinistra B_6. Tale è appunto il nostro caso, cosicchè rappresenteremo il doppio 18 della radice alle due scanalature B_6 e B_5. Si divide mentalmente il numero 105 delle grandi finestrelle, soprastante al doppio della prima cifra della radice, per questo doppio stesso. Poichè 18 sta 5 volte nel 105, si scrive 5 alla scanalatura seguente B_4, e si danno 5 giri di manovella. Così si sottrae dalle cifre considerate 1053, il prodotto 5×185, ed il 1053 diventa 128, mentre il 5, seconda cifra della radice, apparisce alla destra della prima. Notiamo che il numero dei giri di manovella non deve mai superare 9, e che se il numero formato dal resto e dalla prima cifra del gruppo successivo fosse minore del doppio della radice, la cifra successiva della radice stessa dovrebbe essere zero.

6° Si considera il gruppo successivo 48 e si fa rientrare di un posto la lastra mobile. Si raddoppia il numero 95 già ottenuto alla radice e si rappresenta questo doppio 190 col mezzo dei bottoni ad indice delle scanalature B_6, B_5, B_4. Si osserva quante volte il 190 è contenuto nel 1284. Poichè vi è contenuto 6 volte, si scrive il 6 alla scanalatura B_3 successiva, e si danno 6 giri alla manovella motrice. Così dalle cifre considerate 12848 si sottrae il prodotto 6×1906; mentre il 6, terza cifra della radice, apparisce alle piccole finestrelle.

7° Si continua così l'operazione finchè siasi terminato di considerare tutti i gruppi del numero dato. Nel nostro caso col resto 1412 consideriamo il gruppo successivo 50 e raddoppiamo alle scanalature B_6, B_5, B_4, B_3, il numero 956 già ottenuto alla radice. Osservando che questo doppio 1912 è contenuto 7 volte nel 14125, scriveremo il 7 alla scanalatura B_2, e, dopo di aver fatto rientrare la lastra mobile di un posto, daremo 7 giri di manovella. Così dal 141250 si sottrae il prodotto 7×19127, ed alle grandi finestrelle apparisce il resto 7361, mentre alle piccole finestrelle appare la quarta cifra della radice cercata.

Facendo rientrare infine di un posto la lastra mobile, considereremo l'ultimo gruppo binario 00 del numero proposto. Scritto poscia il doppio della radice 19134 alle scanalature B_6, B_5, B_4, B_3, B_2, osserveremo quante volte questo doppio è contenuto nel numero 73610. Poichè vi è contenuto 5 volte, scriveremo il 3 alla scanalatura B_1 e daremo 3 giri alla manovella motrice: allora alle grandi finestrelle rimane l'ultimo resto 162071, e l'intiera radice 95673 apparisce alle piccole finestrelle.

Possiamo adunque rispondere che:

$$\sqrt{9153\overline{48}.5} = 956.73$$

II. *Secondo procedimento.* — Avuto riguardo alla disposizione dell'apparecchio, in molti casi l'estrazione della radice quadrata da un numero dato si ottiene assai più rapidamente applicando il metodo delle addizioni successive. Questo procedimento è fondato sulle proprietà della progressione aritmetica:

$$\div\ 1, 3, 5, 7, \ldots..$$

In una progressione aritmetica qualsiasi, ove δ è la differenza o la ragione, a il primo termine, l l'ultimo, S la somma dei primi n termini, hanno luogo le due formole:

$$l = a + (n - 1)\,\delta;$$

$$S = \frac{1}{2}\,n\,(a + l).$$

Se consideriamo quindi la progressione $\div\ 1, 3, 5, 7, \ldots$ si ha:

$$\delta = 2;$$
$$a = 1.$$

Quindi:

$$l = 1 + 2\,(n - 1) = 2\,n - 1,$$

ossia

$$l + 1 = 2\,n;$$

e

$$S = \frac{1}{2}\,n\,(1 + l) = n^2.$$

La prima ci dice che *l'ultimo termine, aumentato di 1, è uguale al doppio del numero dei termini della progressione.*

La seconda che *la somma di un numero qualsiasi di termini è uguale al quadrato di questo numero.*

Dato adunque un numero qualsiasi, se noi togliamo successivamente da esso i termini delle serie dei numeri intieri impari 1, 3, 5, 7,....., finchè si ottenga un resto minore del termine seguente, il numero delle sottrazioni fatte ci dà la radice del numero proposto a meno di 1 unità. L'ultimo numero sottratto poi, aumentato di 1, ci dà il doppio della radice stessa.

Applicheremo questo secondo metodo all'esempio precedente:

$$\sqrt{9153\overline{48}.5}.$$

1° Si porta l'aritmometro a zero.

2° Inscritto come prima il numero 91′ 53′ 48′ 50′ 00 alle grandi finestrelle, e diviso in gruppi di due cifre partendo da destra, si considerano le prime 5 scanalature B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 a destra.

3° Si dispone il commutatore per la differenza.

4° Sollevata la lastra mobile, la si sposta finchè la seconda cifra 1 del primo gruppo sia direttamente al disopra della prima scanalatura di sinistra B_5. Si sottraggono successivamente dal primo gruppo 91 i termini della serie intiera dispari 1, 3, 5, 7,....., inscrivendoli prima alla scanalatura B_5 e, quando occorre, valendosi pure della vicina di sinistra B_6, e dopo ciascuna inscrizione dando un giro di manovella. La sottrazione si continua finchè il 91 sia ridotto ad un altro numero minore del termine che segue l'ultimo sottratto; nel nostro caso sottrarremo successivamente i 9 numeri 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ed il primo gruppo si cambia in 90, 87, 82, 75, 66, 55, 42, 27 e 10, dopo sottratto il 17. La prima cifra della radice cercata è adunque 9, che apparisce ad una delle piccole finestrelle, mentre alle grandi finestrelle apparisce il numero 10′ 53′ 48′ 50′ 00, che rappresenta la differenza fra il numero proposto e 90000^2.

5° Arrivati a questo punto, possiamo dire che la radice cercata è della forma:

$$90000 + x,$$

ove x è un numero di 4 cifre da aggiungersi al 90000 per avere la radice cercata. Cosicchè:

$$91'\,53'\,48'\,50'\,00 = (90000 + x)^2 =$$
$$= 90000^2 + 2 \times 90000 \times x + x^2;$$

e togliendo da ambo i membri 90000^2:

$$10'\,53'\,48'\,50'\,00 = 2 \times 90000 \times x + x^2 =$$
$$= x\,(2 \times 90000 + x).$$

Per ottenere x si dovrà dunque sottrarre successivamente dal numero 10′ 53′ 48′ 50′ 00 i termini della progressione:

$$\div\ 180000 + 1,\ \ 180000 + 3,$$
$$180000 + 5,\ \ 180000 + 7, \ldots..$$

Per averne la prima cifra ci basta considerare il numero 1053 formato dal primo resto 10 e dal secondo gruppo 53, e da questo sottrarre successivamente i termini della progressione:

$$\div\ 180 + 1,\ \ 180 + 3,\ \ 180 + 5,\ \ 180 + 7, \ldots..$$

Dunque si fa rientrare la lastra mobile di un posto, si scrive alle scanalature B_6 e B_5 il doppio 18 del numero già ottenuto alla radice, e si sottraggono successivamente dal numero 1053 i termini di questa progressione. Notisi che per ottenere alle scanalature il doppio della prima cifra della radice basta aggiungere 1 all'ultimo numero 17 sottratto nell'operazione precedente. Si vedrà successivamente il 1053 cambiarsi in 872, 689, 504, 317, 128, cosicchè 5 è la nuova cifra della radice, che apparirà alle piccole finestrelle a destra della precedente.

6° Si considera il numero 12848 formato dal resto precedente 128 e dal 3° gruppo, ed alle scanalature si aggiunge 1 all'ultimo numero sottratto 189, in modo da ottenere alle medesime il doppio 190 del numero 95 già ottenuto alla radice. Fatta poscia rientrare la lastra mobile di un posto, si sottraggono dal 12848 i termini della progressione:

$$\div\ 1900 + 1,\ \ 1900 + 3,\ \ 1900 + 5,\ \ 1900 + 7, \ldots.$$

Il 12848 si cambierà successivamente in 10947, 9044, 7139, 5232, 3323, e finalmente in 1412, occorrendo 6 sottrazioni. Dunque 6 è la terza cifra della radice, che apparirà alle piccole finestrelle a destra delle due prime, mentre il numero proposto si è ridotto a 14′ 12′ 50′ 00.

7° Colla stessa facilità si ottengono le altre due cifre della radice. Considerando il gruppo successivo 50, si aggiunge 1 all'ultimo numero 1911 che è stato sottratto; così alle scanalature B_6, B_5, B_4, B_3, trovasi inscritto il doppio 1912 della radice 956 già ottenuta. Si fa rientrare di un posto la lastra mobile, e si sottraggono dal numero 141250 i termini della progressione:

$$\div\ 19120 + 1,\ \ 19120 + 3,\ \ 19120 + 5,\ \ 19120 + 7, \ldots$$

Il numero 141250 si cambia in 122129, 103006, 83881, 64754, 45625, 26494, 7361; 7 sarà quindi la 4ª cifra della radice.

Finalmente considerando il numero 736100 che ora apparisce alle grandi finestrelle, si aggiunge 1 al numero 19133 attualmente inscritto alle scanalature. Si fa rientrare di un posto la lastra mobile, e si sottraggono dal 736100 i termini della progressione:

$$\div\ 191340 + 1,\ \ 191340 + 3,$$

$$191340 + 5,\ \ 191340 + 7, \ldots..$$

Alle grandi finestrelle appariranno successivamente i numeri 544759, 353416 e finalmente l'ultimo resto 162071. L'ultima cifra della radice cercata è adunque 3, e l'intiera radice 95673 trovasi inscritta alle piccole finestrelle.

Seguendo questo procedimento si ottiene la radice cercata colla massima rapidità.

Prova dell'estrazione di radice quadrata. — Lasciando il resto ottenuto alle grandi finestrelle, e disposto il commutatore per la somma, si inscrive la radice alle scanalature B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, e si moltiplica questa radice per sè stessa. Alle grandi finestrelle dovrà riapparire il numero dato.

Estrazione della radice cubica. — Anche per la radice cubica l'aritmometro segue perfettamente il procedimento ordinario; riteniamo perciò inutile il descriverlo minutamente. Notiamo solamente che per conseguire la massima rapidità, sia in questa operazione che nella estrazione delle radici di ordine più elevato, sarà conveniente l'opera simultanea di due operatori, uno dei quali opererà all'aritmometro, e l'altro si occuperà delle registrazioni e dei piccoli calcoli da farsi a parte sulla carta.

Operazioni complesse che si possono facilmente eseguire coll'aritmometro. Calcolo di tavole numeriche. — Non è solo nelle operazioni semplici ed isolate che l'aritmometro presenta dei vantaggi sul calcolo comune. La sua superiorità anzi è ben più manifesta quando si tratta di operazioni complesse, quali si presentano nel calcolo delle formole impiegate nella maggior parte dei problemi della pratica. Per queste operazioni esso presenta il grande vantaggio che i successivi risultati sono, nella massima parte dei casi, direttamente trasformati gli uni negli altri, senza che occorra prenderne nota.

Così si potrà coll'aritmometro calcolare assai facilmente e senza che occorra trascrivere i diversi risultati parziali, la somma o la differenza di una serie di prodotti semplici, come:

$$A \times B \pm C \times D \pm E \times F \pm \ldots..;$$

ed anche la radice quadrata di questo polinomio.

Si possono pure facilmente ottenere con questo apparecchio: il terzo lato di un triangolo rettangolo di cui si conoscono gli altri due, applicando il teorema di Pitagora; il quarto termine di una proporzione di cui si conoscono gli altri tre; ecc.

Coll'ajuto poi delle tavole delle linee trigonometriche naturali, quali si usavano prima dell'invenzione dei logaritmi e che si trovano in tutti i manuali, l'aritmometro permette di eseguire il calcolo delle formole trigonometriche, riducendolo a quello di semplici formole algebriche. Esso dispensa, per conseguenza, dall'uso dei logaritmi, che non saranno più necessarii che nei casi rarissimi delle formole esponenziali. A questo modo il calcolo di molte formole complesse potrà essere affidato a persona anche di studii poco elevati, a cui riescirà molto più facile l'imparare l'uso pratico dell'aritmometro che non quello dei logaritmi.

Valendosi quindi delle tavole delle linee trigonometriche naturali, si potrà procedere in modo assai semplice alla risoluzione generale dei triangoli; come pure al calcolo delle formole:

$$\text{Sen}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta \pm \text{Sen}\,\beta\ \text{Cos}\,\alpha;$$

$$\text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta \pm \text{Sen}\,\alpha\ \text{Sen}\,\beta;$$

$$\frac{\text{Sen}\,\alpha + \text{f Cos}\,\alpha}{\text{Cos}\,\beta \pm \text{f sen}\,\beta}\,Q;$$

$$\frac{\text{Tang}\,\alpha + \text{f}}{1 \pm \text{f tang}\,\alpha}\,Q;$$

ed altre di forma analoga che si presentano nella Meccanica applicata.

Ma è specialmente nel calcolo o nella verifica della maggior parte delle tavole numeriche, che l'aritmometro si presta in modo meraviglioso.

Così ad es. nella formazione delle tavole dei quadrati e dei cubi dei numeri intieri, converrà compilare dapprima le tavole ausiliarie delle differenze fra i quadrati o fra i cubi dei successivi numeri interi.

Queste tavole si ottengono applicando le formole:

$$(a + 1)^2 - a^2 = 2\,a + 1;$$

$$(a + 1)^3 - a^3 = 3\,a\,(a + 1) + 1;$$

i cui valori particolari si calcoleranno assai speditamente operando in due persone, una delle quali manovra l'aritmometro, mentre l'altra ne registra i risultati. In seguito uno degli operatori detta successivamente i numeri di queste tavole ausiliarie all'altro, che li scrive alle scanalature, e con un giro di manovella ottiene alle grandi finestrelle e detta al primo i successivi quadrati o cubi dei numeri intieri. Si ottengono così i risultati tanto rapidamente che quest'ultimo ha appena il tempo di trascriverli.

Abbiamo veduto come, con un semplice artifizio, si possa eseguire sull'aritmometro a 6 cifre la moltiplicazione di due numeri di 12 cifre ciascuno. Si possono fare altre applicazioni consimili, come: la divisione nel caso in cui il numero delle cifre del divisore supera il numero delle scanalature; il calcolo della radice quadrata con un numero di cifre eguale a quello del quadrato dato; il prodotto di tre fattori con una sola operazione, e per conseguenza il prodotto di un numero per il quadrato di un altro, come per es. la superficie di un circolo di raggio dato; ecc. Non ci fermeremo su questi casi speciali, e rimandiamo il lettore alla memoria pubblicata dall'Hirn (1).

Rapidità delle operazioni eseguite coll'aritmometro. — La rapidità con cui l'aritmometro dà i risultati di molte operazioni è considerevole.

Ad es. il quadrato del numero 999999, formato da sei 9, che è il massimo numero che si può inscrivere alle scanalature, si ottiene in 24″; il prodotto dello stesso numero per 555555 si ottiene in 17″; per 111111 in 10″. Il prodotto dei due numeri di 12 cifre ciascuno, di cui abbiamo parlato precedentemente, è stato ottenuto e verificato in poco più di 2′. Un numero di 12 cifre si divide in 24″ per un altro di 6; ed in poco più di un minuto primo si estrae la radice quadrata da un numero di 12 cifre.

Disgraziatamente però se la macchina permette questa rapidità nell'esecuzione dei prodotti e dei quozienti, non è così per l'addizione e per la sottrazione, ove, come abbiamo già accennato, essa non opera più rapidamente di un calcolatore di abilità comune; il che dipende dalla necessità di inscrivere le varie cifre dei numeri da sommarsi col fare scorrere in determinate posizioni i bottoni ad indice delle scanalature.

(1) Hirn, *Notices sur l'utilité de l'arithmomètre et de l'hydrostat* (*Annales du Génie Civil*, 1863).

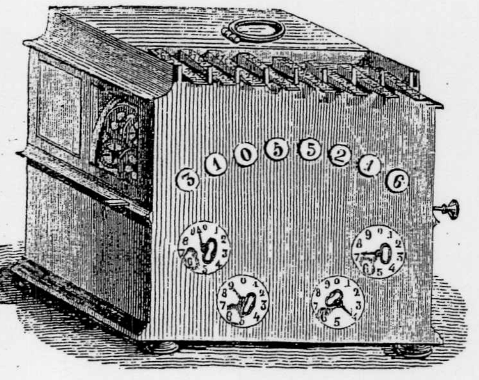


Fig. 673.

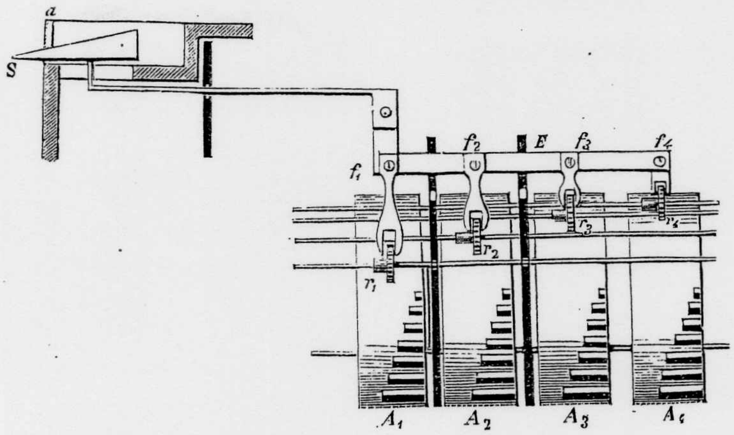


Fig. 674.

I numerosi perfezionamenti apportati a questa macchina veramente ingegnosa, che le tolsero ad un tempo il carattere di strumento di precisione ed i difetti nel suo movimento, contribuiranno per certo ad estenderne sempre più l'applicazione. Ed invero i servigi che essa può rendere nel commercio, nell'industria e nella scienza sono immensi. Così le grandi Case bancarie e le Amministrazioni finanziarie, che sono state le prime in Francia a far uso dell'aritmometro, sono unanimi nel constatarne l'utilità, non solo nei calcoli relativi alle tavole d'interesse, di sconto, di statistica ecc., ma eziandio nei calcoli correnti.

Un voto solo è da farsi sull'avvenire dell'aritmometro Thomas. Malgrado i grandi vantaggi che esso presenta, la sua pratica applicazione non ha ancora preso oggidì quello sviluppo che i suoi servigi possono comportare. Questo fatto proviene in special modo dal suo prezzo troppo elevato (1), che non ne permette l'acquisto che ai grandi stabilimenti, ed alle Amministrazioni di una certa importanza. Tuttavia l'apparecchio, benchè di costruzione complicata, è formato da molti organi identici fra di loro, cosicchè ove la fabbricazione di questa macchina fosse posta in condizioni industriali, il suo prezzo potrebbe essere sensibilmente ridotto. Sarebbe un grande servigio reso al commercio, all'industria ed alla scienza, e noi vedremmo certamente l'aritmometro Thomas estendersi assai più rapidamente, ed entrare anche nel piccolo commercio e nell'ufficio del privato.

Aritmaurel di Maurel e Iayet.

Nel 1849 i signori Maurel e Iayet presentarono all'Accademia delle Scienze di Parigi una macchina calcolatrice da loro denominata *Aritmaurel*. Essa ottenne la medaglia d'oro all'Esposizione industriale francese dello stesso anno, ed il premio di meccanica della fondazione Montijon (2). Questa macchina eseguisce automaticamente le quattro prime operazioni dell'aritmetica, quando il risultato non ha più di 8 cifre.

Descrizione dell'apparecchio. — Il meccanismo dell'*aritmaurel* è contenuto in una cassetta parallelepipeda lunga m. 0.30, larga m. 0.30, alta m. 0.25.

Sulla faccia superiore di questa cassetta (fig. 673) sono disposti 8 bastoncini o *scale*, su ciascuna delle quali è segnata la serie delle cifre 0, 1, 2,...... 9. Questi bastoncini sono scorrevoli orizzontalmente, e l'operatore può farli avanzare o retrocedere a mano, finchè una qualunque delle loro cifre venga a collocarsi in corrispondenza delle verghette che trovansi fra le varie scale e che servono da indici fiduciarii. Ognuna delle scale porta lateralmente una piccola dentiera munita di 10 denti o risalti in corrispondenza delle 10 cifre segnate superiormente; le verghette che fanno da indice, essendo leggermente spinte da piccole molle nei vani delle dentiere anzidette, assicurano le scale nelle loro varie posizioni. Mercè queste scale si può rappresentare qualsiasi numero che non abbia più di 8 cifre: ad esse si scrive il fattore maggiore, quando si tratta di una moltiplicazione; il divisore, quando si tratta di una divisione.

Nella parete anteriore della macchina, al di sotto delle scale, sono scolpite 8 finestrelle, disposte secondo un arco di circolo. Ognuna di queste finestrelle corrisponde ad un *quadrante interno*, su cui sono segnate le cifre 0, 1, 2,......... 9: ad esse si legge il prodotto in una moltiplicazione, e si scrive il dividendo in una divisione.

Al di sotto delle finestrelle trovansi 4 *quadranti esterni*, sui quali sono segnate le cifre 0, 1, 2,..... 9, crescenti da sinistra verso destra. Sull'asse di ciascuno di questi quadranti esterni vi ha una *maniglia* girevole a mano: facendo ruotare queste maniglie si pongono in moto le *lancette* dei quadranti esterni. Il movimento, sia delle maniglie che delle lancette, può aver luogo nei due sensi. *La rotazione positiva (da sinistra a destra) serve per l'addizione e la moltiplicazione; la negativa per la sottrazione e la divisione.* — Il moto delle lancette poi non è continuo, ma intermittente, per modo che esse si fermano un istante su ciascuna cifra del proprio quadrante; tale effetto è ottenuto mediante piccole molle, che colla loro estremità libera penetrano nei vani di piccoli rocchetti interni disposti sugli assi delle lancette.

Ai 4 quadranti esterni si può rappresentare qualsiasi numero avente meno di 5 cifre: il quadrante di destra è destinato alle unità, ed i successivi a sinistra alle decine, centinaja e migliaja. Ai medesimi si rappresenta il fattore minore in una moltiplicazione di 2 numeri, e si legge il quoziente in una divisione. In figura il numero scritto ai quadranti esterni è 9947.

(1) Ecco i prezzi attuali degli aritmometri dati a Parigi:
Aritmometro che permette di ottenere un prodotto di

12 cifre,	con	*effaceur*	. . . . L.	400
16 »	»	»	. . . . »	500
16 »	senza	»	. . . . »	400
20 »	con	»	. . . . »	800

(2) *Bulletin de la Société d'encouragement*, 1849, pag. 370.

L'organo cinematico fondamentale della macchina di cui parliamo, è lo stesso cilindro parzialmente dentato dovuto al Thomas, che abbiamo descritto parlando dell'aritmometro. L'applicazione però ne è fatta in modo diverso.

Consideriamo 4 cilindri parzialmente dentati A_1, A_2, A_3, A_4 (fig. 674), cioè dentati sopra una parte sola del loro contorno, e con 9 denti di lunghezze proporzionali ai numeri 9, 8, 7,..... 1. Questi cilindri distano ugualmente fra di loro, e sono disposti coi loro assi sopra una medesima retta. Essi però sono indipendenti l'uno dall'altro, e sono comandati: il cilindro A_1 dalla maniglia del quadrante delle unità; i cilindri successivi A_2, A_3, A_4 rispettivamente dalle maniglie degli altri quadranti esterni. Non entreremo nei particolari, del resto facili ad immaginarsi, di questa trasmissione di movimento dalle maniglie dei quadranti esterni, ai rispettivi cilindri A. Ci basti il sapere che quando l'operatore, facendo girare nel verso positivo, ad es., la maniglia del quadrante esterno delle unità, ne porta la lancetta dallo 0 sulle cifre 1, 2,..... 9, il cilindro A_1 fa 1, 2,.... 9 giri completi in un certo verso; quando invece l'operatore manovra la maniglia stessa nel verso negativo, il cilindro A_1 compie ancora tante rivoluzioni quante sono le cifre su cui passa la lancetta, ma la rotazione è contraria alla precedente.

Parallelamente all'asse comune dei cilindri A, sono disposti, secondo una superficie cilindrica, 8 assi di rotazione a sezione semicircolare, ciascuno dei quali porta 4 piccoli rocchetti dentati; questi rocchetti sono scorrevoli lungo il proprio asse di rotazione, e possono imboccare coi denti dei cilindri A. Ciascuna delle scale S porta 4 piccole forcelle f_1, f_2, f_3, f_4, fissate normalmente ad un'asta E disposta obliquamente all'asse dei cilindri parzialmente dentati: queste 8 aste E formano come il prolungamento delle 8 scale esterne S. Le 4 forcelle portate da ciascuna delle aste E, sono equidistanti fra di loro, e la loro distanza comune è precisamente uguale alla distanza comune fra le faccie anteriori dei varii cilindri A.

Le forcelle f_1, f_2, f_3, f_4 di ciascun'asta obliqua E, abbracciano 4 dei rocchetti dentati scorrevoli di cui abbiamo parlato precedentemente. Però i quattro rocchetti r_1, r_2, r_3, r_4 comandati ad un tempo da una delle scale S, non trovansi sul medesimo asse di rotazione, ma sopra 4 assi diversi e successivi; a questo modo il primo rocchetto di ciascuna scala è sull'asse medesimo del secondo rocchetto della scala precedente; il secondo sull'asse del terzo; ed il terzo sull'asse del quarto.

Spostando una qualunque delle scale S, i quattro rocchetti corrispondenti portati dalle forcelle f, scorrono lungo i proprii assi di rotazione, e possono essere condotti, tutti ad un tempo, od al primo nono della lunghezza dei cilindri parzialmente dentati A_1, A_2, A_3, A_4, od al secondo nono,..... od anche oltre i cilindri stessi. Inoltre le cifre delle scale S, che l'operatore porta davanti agli indici a, indicano la posizione presa da questi rocchetti lungo i cilindri. Così quando si porta una delle scale S ad es. colla cifra 7 al proprio indice a, i quattro rocchetti scorrevoli comandati da questa scala sono portati lungo i 4 cilindri A ai $^7/_9$ della lunghezza del dente più lungo, e quindi ad ogni rivoluzione completa dei cilindri essi avanzano di 7 denti.

Gli otto assi di rotazione dei rocchetti scorrevoli portano alla loro estremità anteriore i quadranti delle 8 finestrelle. Questi assi, e quindi questi quadranti, dipendono l'uno dall'altro per modo che quando uno di essi ha fatto un giro intiero, un meccanismo speciale fa avanzare di una cifra l'asse vicino di sinistra. Non descriveremo questo meccanismo, limitandoci a dire che i riporti delle decine si fanno mentre gli assi si muovono, e che la trasmissione è simultanea. Però nell'intento di ovviare alla difficoltà che si presenterebbe quando il riporto si deve estendere simultaneamente a tutti gli 8 assi mediante uno sforzo applicato al primo, si è interrotta la comunicazione di movimento dal quarto asse al quinto, e la forza per eseguire i riporti al quinto asse ed ai seguenti è data direttamente dalla maniglia motrice. In tal modo il primo asse produrrà tutto al più lo spostamento simultaneo dei tre assi vicini di sinistra.

Senza fermarci sopra altri meccanismi speciali, destinati ad assicurare ed a moderare il movimento delle varie parti di questa macchina, terminiamo questa breve descrizione osservando ancora che tutte le finestrelle, e le 4 lancette dei quadranti esterni, possono essere simultaneamente condotte a zero estraendo un bottone che trovasi alla destra dell'apparecchio (fig. 673). Questo bottone sposta longitudinalmente una spranghetta interna, guidata, a destra, dall'asse dello stesso bottone, ed a sinistra, da una lastrina che si prolunga alquanto all'esterno.

In alcuni *aritmaurel* esistono due serie di 8 finestrelle ciascuna, disposte secondo archi concentrici. Le 8 finestrelle inferiori sono le più importanti, e corrispondono a quelle di cui sono muniti gli apparecchi ad una sola serie di finestrelle. Le 8 finestrelle superiori hanno meno importanza: esse permettono, eseguendo la somma algebrica di più prodotti, di leggere i successivi prodotti parziali, proprietà che non è posseduta dall'apparecchio precedentemente descritto, e neppure dall'aritmometro Thomas, e che in certi casi può essere utile. Queste 8 finestrelle superiori corrispondono ad altri 8 quadranti interni, i quali sono posti in moto da un sistema cinematico affatto identico a quello che abbiamo descritto. Basta dunque immaginare che esistano due di questi meccanismi: uno inferiore destinato a muovere i quadranti delle finestrelle inferiori; l'altro superiore destinato alle finestrelle superiori. Le stesse maniglie comandano simultaneamente i due sistemi.

Proprietà e pratica dell'aritmaurel. — Da quanto abbiamo esposto, riesce facile intendere come agisca questo apparecchio: supporremo che si tratti dell'*aritmaurel* ad una sola serie di finestrelle, quale è rappresentato nella fig. 673.

Suppongasi in primo luogo che alle scale si segni un numero qualsiasi, ad es. il numero 34413, e che tutte le finestrelle e le lancette siano allo zero. Allora se colla rotazione positiva della maniglia delle unità si porta la lancetta del primo quadrante esterno dallo 0 alla cifra 1, il primo cilindro A_1 fa un giro intiero, e quindi il numero 34413 apparisce alle prime 5 finestrelle; se si porta poi successivamente la lancetta sulle cifre 2, 3, 4.... appariranno successivamente il doppio, il triplo, il quadruplo,..... dello stesso numero.

Se invece di agire sulla maniglia del quadrante delle unità, si facesse ruotare la maniglia del quadrante delle decine, portandone successivamente la lancetta sulle cifre 1, 2, 3, 4,....., si otterrebbero ancora i medesimi risultati di prima; però siccome le unità ora appariscono alla seconda finestrella di destra, si leggeranno successivamente alle finestrelle i prodotti del numero proposto per 10, 20, 30, 40,....... Analogamente se si opera colla maniglia del quadrante delle centinaja, oppure con quella del quadrante delle migliaja, si otterranno ancora alle finestrelle i successivi multipli del numero proposto, ma spostati di 2 o 3 cifre a sinistra: cosicchè si leggeranno i prodotti di questo numero per 100, 200, 300, 400,.....; oppure per 1000, 2000, 3000, 4000,.....

Supponiamo in secondo luogo che alle scale si segni un certo numero, ad es. ancora il 34413, e che, facendo ruotare nel verso positivo la maniglia del quadrante delle unità, lo si faccia apparire alle finestrelle. Allora se noi segniamo alle scale un altro numero minore del precedente, ad es. il 19, e facciamo rotare la stessa maniglia nel verso negativo, spostandone la lancetta di un posto, il cilindro A_1 fa un giro intiero in verso contrario al precedente, e produce la rotazione negativa nei quadranti delle finestrelle; a questo modo il numero 19 si sottrae dal 34413, ed alle finestrelle apparisce il resto della sottrazione. Se si sposta poi la lancetta del quadrante delle unità, sempre colla rotazione negativa, di 2, 3, 4,..... posti, si sottrae dal 34413 il doppio, il triplo, il quadruplo,..... di 19.

Ma se noi invece di agire colla maniglia del quadrante delle unità, avessimo fatto rotare in senso negativo la maniglia del quadrante delle decine, o di quello delle centinaja, o di quello delle migliaja, si sarebbero sottratti dal numero 34413 i successivi multipli di 190, o di 1900, o di 19000.

Queste proprietà permettono di eseguire in modo semplice e rapido specialmente la moltiplicazione e la divisione.

Supporremo sempre che al principio di ogni operazione, tanto le scale, come le finestrelle e le lancette siano allo zero.

Addizione. — Si scrive il primo numero alle scale, e lo si fa apparire alle finestrelle, ruotando nel verso positivo la maniglia del quadrante delle unità, tanto che la propria lancetta passi dallo 0 alla cifra 1.

Si scrive alle scale il secondo numero, e si fa avanzare, sempre nel verso positivo, la lancetta del quadrante delle unità di un'altra cifra: la somma dei due primi numeri apparisce alle finestrelle.

Così si continua inscrivendo successivamente tutti i numeri proposti alle scale, e per ciascuno facendo avanzare di una cifra, nel verso positivo, la lancetta del primo quadrante: alle finestrelle apparirà infine la somma cercata.

Sottrazione. — Scritto il minuendo alle scale e fattolo apparire alle finestrelle, si scrive il sottraendo alle stesse scale, e si fa ruotare la maniglia del quadrante delle unità nel verso negativo, finchè la propria lancetta sia spostata di una cifra: la differenza cercata apparisce allora alle finestrelle.

La sottrazione dà adunque un mezzo per condurre simultaneamente a zero le varie finestrelle. Basta scrivere alle scale il numero indicato a queste finestrelle, e girare la maniglia del quadrante delle unità nel verso negativo, finchè la lancetta corrispondente si sposti di una cifra. Negli *aritmaurel* ad una sola serie di finestrelle non occorre di applicare questo procedimento, poichè, come abbiamo veduto, un apposito bottone laterale conduce tutte le finestrelle a zero. In quelli a due serie di finestrelle, il bottone laterale non serve che per le finestrelle inferiori, mentre per quelle superiori è necessario di eseguire la sottrazione nel modo indicato.

Somma algebrica. — Si ottiene la somma algebrica di più numeri, inscrivendoli successivamente alle scale, e per ciascuno di essi facendo ruotare la maniglia del quadrante delle unità, nel verso positivo per i numeri positivi, nel verso contrario per i numeri negativi. Ciascuna rotazione deve spostare la lancetta di un solo posto.

Moltiplicazione. — L'*aritmaurel*, come l'aritmometro Thomas, presenta il massimo vantaggio per la moltiplicazione e per la divisione.

Se uno dei fattori ha una sola cifra, si scrive il fattore maggiore alle scale, cominciando da destra, e poscia, rotando la maniglia del quadrante delle unità nel verso positivo, si fa passare la lancetta di questo quadrante sul secondo fattore: il prodotto cercato apparirà alle finestrelle.

Se si tratta di un prodotto di due fattori di più cifre, ad es. del prodotto:

$$78378 \times 327,$$

l'operazione si eseguisce in questo modo:

Si rappresenta il fattore maggiore 78378 alle prime cinque scale di destra, e si fa ruotare la maniglia del quadrante delle unità nel verso positivo, finchè la propria lancetta giunga alla cifra 7; alle finestrelle apparisce il primo prodotto parziale 7×78378.

Si fa ruotare la maniglia del quadrante delle decine nel verso positivo, finchè la lancetta corrispondente segni la cifra 2; si forma così il secondo prodotto parziale 20×78378, e contemporaneamente si aggiunge al primo.

Si fa ruotare infine la maniglia del quadrante delle centinaja, sempre nel verso positivo, finchè la propria lancetta segni la cifra 3; si forma così il terzo prodotto parziale 300×78378, che si aggiunge alla somma dei due primi, sicchè alle finestrelle apparisce il prodotto cercato 25629606.

Abbiamo considerate le successive cifre del moltiplicatore cominciando dalle unità e procedendo verso sinistra; è chiaro però che queste cifre si possono prendere in qualsiasi altro ordine, purchè si faccia ruotare per ciascuna cifra la maniglia del quadrante che gli corrisponde.

Nel modello di cui parliamo il prodotto non potrà avere più di 8 cifre, perciò la somma delle cifre dei due fattori potrà essere tutto al più di 9.

Trattandosi di due fattori di più di 4 cifre si potrà ancora convenientemente applicare l'*aritmaurel*, scomponendo questi prodotti in altri che si possano direttamente ottenere dalla macchina, come abbiamo veduto parlando dell'aritmometro Thomas.

Divisione. — Supponiamo che debbasi trovare il quoziente:

$$\frac{29787893}{32428}.$$

Si rappresenta il dividendo alle scale e lo si fa apparire alle finestrelle, facendo girare nel verso positivo la maniglia del quadrante delle unità, finchè la propria lancetta passi alla cifra 1.

Si riconduce poi, spostandola col dito, questa lancetta allo 0, e si scrive il divisore alle cinque scale di destra. Poscia, cominciando dal quadrante delle migliaja, si tenta di farne ruotare la maniglia nel verso negativo: la resistenza che si sente nel tentare questo movimento indica che il quoziente non contiene migliaja, od in altre parole che dal primo dividendo parziale 29787 non si può sottrarre il divisore 32428.

Si passa successivamente ai quadranti delle centinaja, delle decine, e delle unità, facendone ruotare le rispettive maniglie nel verso negativo, finchè ciascuna di esse si arresti nel suo movimento; in questo caso le lancette corrispondenti si arrestano dopo di essersi spostate rispettivamente di 9, 1, 8 posti. Concluderemo che il quoziente cercato è 918.

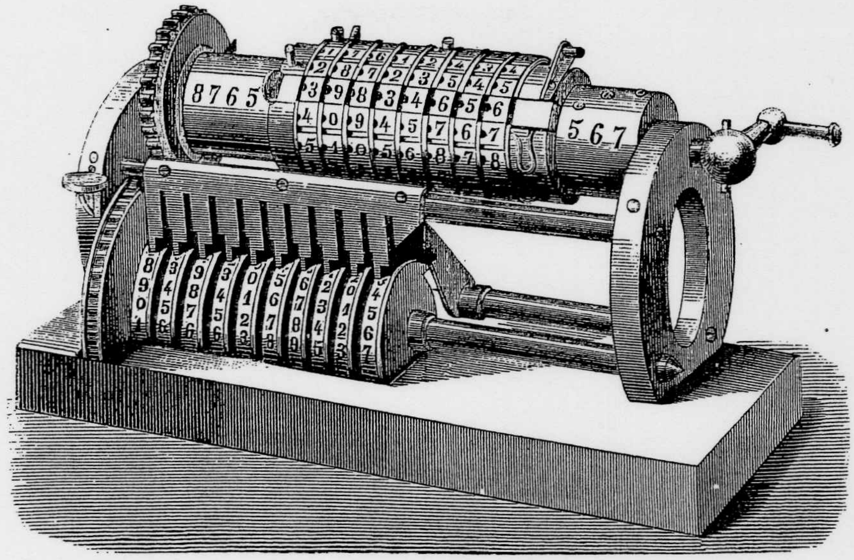


Fig. 675.

Coll'apparecchio in discorso si può operare direttamente sopra un dividendo con meno di 9 cifre ed un divisore tale che il quoziente non abbia più di 4 cifre. Se il quoziente avesse un numero maggiore di cifre, con una prima operazione se ne trovano le prime quattro; con una seconda più semplice della precedente se ne ricavano le altre.

Somma algebrica di più prodotti. — La somma algebrica di più prodotti:

$$A \times B \pm C \times D \pm E \times F \pm \ldots..$$

si ottiene nel seguente modo:

Eseguito il primo prodotto $A \times B$, seguendo il procedimento indicato, si riconducono a zero le lancette dei varii quadranti, senza valersi delle maniglie, cioè spostandole col dito.

Si fa poscia il secondo prodotto $C \times D$, il quale si sommerà o si sottrarrà dal precedente, secondochè nel fare questa seconda operazione si ruotano tutte le maniglie nel verso positivo, ovvero nel verso negativo.

Continuando allo stesso modo per gli altri prodotti, si ottiene infine la somma algebrica cercata alle finestrelle.

Le otto finestrelle superiori, negli apparecchi a due serie di finestrelle, hanno per unico scopo di registrare queste somme algebriche di più prodotti, indipendentemente dalle finestrelle inferiori, quando si vogliano leggere anche i successivi prodotti parziali. In questo caso, eseguito ciascun prodotto, si portano a zero le finestrelle inferiori; alle medesime appariranno così successivamente i varii prodotti parziali, dei quali si potrà quindi tener nota, mentre invece alle finestrelle superiori apparirà la somma algebrica dei prodotti successivamente ottenuti, compreso l'ultimo che si scorge alle finestrelle inferiori.

Come già abbiamo avvertito, la celerità nell'uso dello strumento dei signori Maurel e Iayet si rileva specialmente nella moltiplicazione e nella divisione. Dagli esperimenti fatti dai commissarii Cauchy, Largeteaux, Seguier e Binet, incaricati dall'Accademia delle Scienze di Parigi di esaminare l'apparecchio di cui ci siamo occupati (1), rileviamo che il prodotto $2749 \times 3957 = 10877793$ si è ottenuto in 20″; il prodotto $49 \times 53 \times 73 = 189581$ in meno di 16″; la somma:

$$7493 \times 253 + 2548 \times 5952 = 34130479, \text{ in } 33''.$$

Malgrado queste proprietà, l'*aritmaurel* non ebbe che una piccolissima diffusione.

Macchina di Grant.

Il signor George Grant di Boston presentò all'Esposizione Universale di Filadelfia, nel 1876, una macchina calcolatrice da lui inventata nel 1870.

Questa macchina (fig. 675) consta di un cilindro superiore girevole attorno al proprio asse mediante una manovella. Lungo questo cilindro può farsi scorrere a mano un secondo cilindro, cavo, che può prendere sul primo 8 posizioni diverse determinate da piccole tacche. Il cilindro scorrevole porta 8 *anelli* metallici, su ciascuno dei quali sono segnate le cifre 0, 1, 2,........9. L'operatore, facendo girare a mano questi varii anelli, può rappresentare lungo una linea determinata qualsiasi numero che non abbia più di 8 cifre: nella figura il numero scritto sul cilindro scorrevole è 39834656.

Sopra di un asse di rotazione inferiore e parallelo all'asse precedente, sono disposti 10 piccoli *dischi*, sulla superficie convessa dei quali sono pure scritte le cifre 0, 1, 2,........9; 10 indici fissi segnano sopra questi dischi un numero qualsiasi con meno di 11 cifre.

Il moto impresso dalla manovella motrice al cilindro superiore è comunicato ai dischi sottostanti, mercè uno speciale meccanismo, così congegnato che *ogni giro di manovella somma o sottrae, a seconda del verso della rotazione, il numero rappresentato agli anelli col numero rappresentato ai dischi, e la somma o la differenza apparisce ai dischi stessi.*

Ne consegue che, supposti gli anelli ed i dischi allo zero, se l'operatore rappresenta un certo numero agli anelli, con un giro di manovella questo numero è riprodotto ai dischi inferiori; con un secondo, un terzo,..... giro di manovella, sempre nello stesso verso, apparisce ai dischi il doppio, il triplo,....... del numero stesso. Se poi ad ogni giro di manovella si cambia il numero

(1) *Compt. rend. de l'Acad. des Sciences*, 1849, pag. 209.

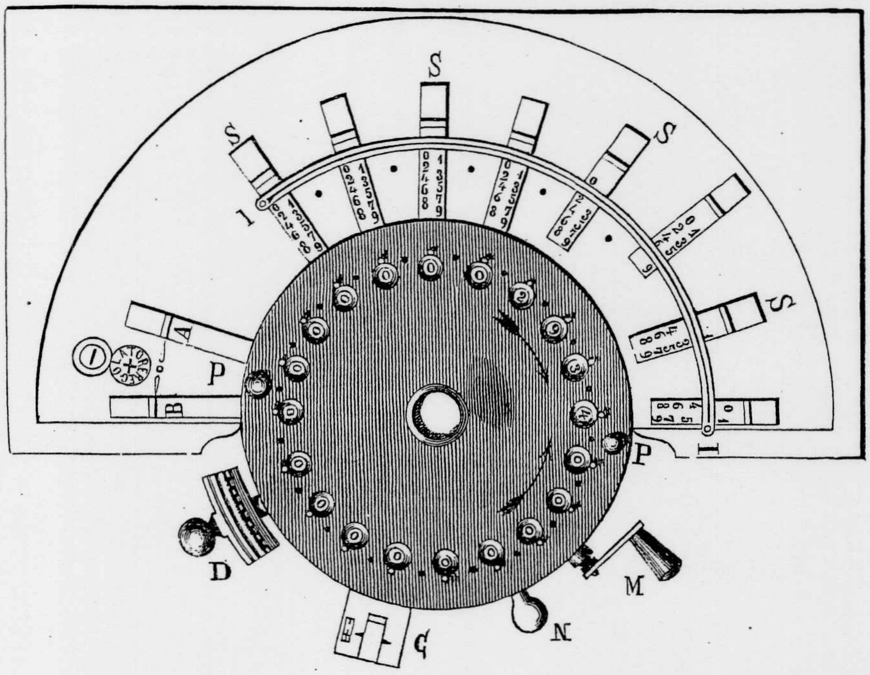


Fig. 676.

rappresentato agli anelli, si ottiene ai dischi la somma dei numeri successivamente rappresentati; la sottrazione si ottiene facendo girare la manovella in verso contrario.

La moltiplicazione è ottenuta colla somma dei successivi prodotti parziali spostati successivamente di un posto a sinistra; tale spostamento è prodotto dall'anello cavo, il quale, come già abbiamo avvertito, può prendere 8 diverse posizioni lungo il cilindro superiore. Così volendosi moltiplicare 895 per 327, si segna uno dei fattori, ad es. 895, agli anelli, e si danno tanti giri di manovella quante sono le unità del moltiplicatore, cioè 7; il prodotto 895×7 apparisce ai dischi inferiori. Se ora si sposta il cilindro cavo, e quindi tutto il moltiplicando, di un posto a sinistra, e si danno due giri di manovella, si ottiene il prodotto 895×20, il quale si somma al precedente. Spostando il cilindro cavo di un altro posto a sinistra, e dando 3 giri di manovella, si ottiene il prodotto 895×300, che si somma ai precedenti; sicchè il prodotto cercato:

$$895 \times 327 = 895 \times 7 + 895 \times 20 + 895 \times 300 = 292665$$

apparisce infine ai dischi inferiori. Un mezzo giro di manovella in senso contrario porta tutti i dischi a 0, e la macchina è pronta per una nuova operazione.

La divisione si ottiene con un procedimento inverso, il dividendo è scritto ai dischi inferiori, il divisore agli anelli, ed il quoziente viene da sè a registrarsi ai dischi.

L'apparecchio ha piccole dimensioni, cioè circa m. 0.33 di lunghezza, m. 0.175 di larghezza, e m. 0.125 di altezza; il suo modo di agire semplice, rapido, ed esatto, la sua accurata e solida costruzione, furono apprezzati dalla Giurìa dell'Esposizione, che ne fece favorevole rapporto (1).

Macchina di Edmondson.

All'Esposizione delle invenzioni tenuta in Londra nel 1885, il signor Joseph Edmondson, di Halifax-York, presentò una macchina calcolatrice, che serve ad eseguire le varie operazioni dell'aritmetica (2). Questa macchina si può ritenere come un'applicazione dell'aritmometro Thomas, in cui i cilindri parzialmente dentati e le finestrelle a cui appariscono i numeri, sono disposti secondo circonferenze di circolo.

Superiormente, ed in direzione dei raggi di un cerchio, vi hanno 8 laminette o *scale* S (fig. 676), che portano le cifre 0, 1, 2,.......9. Queste scale sono scorrevoli nel senso della loro lunghezza, e l'operatore può portare una qualunque delle loro cifre contro lo spigolo interno di un arco metallico II, che fa da indice comune a tutte le scale S. Mediante le medesime si può così rappresentare qualunque numero avente meno di 9 cifre; in figura è scritto alle scale il numero 2934.

Al disotto di ciascuna delle scale S sono disposti due assi di rotazione paralleli fra di loro ed alle scale stesse. Sull'*asse inferiore* ruota un cilindro parzialmente dentato, formato da 9 dischi o ruote dentate congiunte fra di loro, le quali hanno rispettivamente 9, 8, 7,.....1 denti distribuiti sopra una parte del loro contorno, lasciandone liscia la parte rimanente. Il disco di 9 denti è il più distante dal centro della macchina; gli 8 denti del disco vicino sono il prolungamento di un eguale numero di denti del precedente; e così di seguito per i varii dischi, cosicchè queste serie di ruote dentate formano i cilindri parzialmente dentati caratteristici dell'aritmometro Thomas. Lungo l'*asse superiore* è scorrevole un manicotto, il quale ruota coll'asse stesso e porta una piccola

(1) Ecco il testo del rapporto, firmato dal presidente Barnard, e dai professori Hilgard, Henry, Watson e Thomson: « It is simple in construction, not liable to get out of order, its use greatly saves the mental labor of computation, and lessens the liability to error. It is deemed superior to all other instruments of its class yet produced ». *Scientific American*, 1877, pag. 294, I.

(2) *Scientific American*, 1886, pag. 7948. — *Iron*, 1885, pag. 531.

ruota stellata ed un rocchetto a 10 denti. Quest'ultimo può imboccare coi denti delle varie sezioni del cilindro, e perciò ruota di 9, 8, 7,.......1 denti, secondochè imbocca colla sezione a 9 denti, o con quella ad 8, a 7,..... denti.

Gli 8 cilindri parzialmente dentati sono posti simultaneamente in rotazione, mercè un opportuno sistema di rocchetti conici, da una manovella motrice M, che è fatta girare a mano dall'operatore. Ad ogni giro di manovella tutti i cilindri compiono un'intiera rivoluzione. I rocchetti a 10 denti sono spostati lungo i proprii assi di rotazione, da tante forcelle fissate inferiormente alle scale S; quando l'operatore porta, ad es., la cifra 6 di una di queste scale contro l'indice circolare II, il rocchetto sottostante alla scala stessa è portato nel piano della sezione a 6 denti, cosicchè ad ogni rotazione del cilindro esso avanza di 6 denti.

Il moto che i rocchetti scorrevoli imprimono ai proprii assi è comunicato, col mezzo di un sistema di rocchetti conici accoppiati, ad una serie di 20 quadranti uniformemente distribuiti lungo una circonferenza di circolo. Questi quadranti portano le cifre 0, 1, 2,......9, le quali appariscono una ad una a 20 finestrelle praticate in una lastra metallica girevole attorno al proprio asse. Manovrando opportunamente il commutatore, si ottiene che alle finestrelle le cifre appariscano in ordine crescente, oppure in ordine decrescente; nel primo caso i quadranti sono disposti per l'addizione e la moltiplicazione; nel secondo per la sottrazione e la divisione.

Tutti gli assi superiori sono congiunti fra di loro da un meccanismo speciale atto ad operare i riporti, e formato da tanti manicotti scorrevoli e girevoli sugli assi dei cilindri parzialmente dentati. Ciascuno di questi manicotti porta un lungo dente, il quale, quando uno qualunque dei quadranti ha contato fino a 9, agisce su un secondo rocchetto a 10 denti fisso sull'albero che comanda il quadrante vicino a sinistra, e lo fa avanzare di $^1/_{10}$ di giro, registrando così la decina di riporto.

La lastra circolare su cui sono scolpite le 20 finestrelle, ed a cui sono congiunti i varii quadranti, può farsi girare attorno al proprio asse mediante i due bottoni P, P, che l'operatore spinge a mano. Questa rotazione, che può essere di uno o più posti a destra od a sinistra, corrisponde allo spostamento longitudinale della lastra mobile nell'aritmometro Thomas, ed ha per scopo di spostare i quadranti che sono comandati dagli assi di rotazione dei cilindri scorrevoli. Uno speciale meccanismo poi, serve a condurre simultaneamente tutte le 20 finestrelle a zero; questo meccanismo è comandato da un bottone esterno. Tutti i quadranti poi possono essere portati separatamente allo zero o ad un'altra cifra, mercè un bottone fissato sul proprio asse di rotazione. Fra le varie finestrelle, e fra le varie scale S, trovansi tanti piccoli forellini, entro i quali si possono infiggere dei piccoli aghi di avorio, destinati a separare la parte intiera dalla parte decimale nei numeri su cui si opera.

Se il commutatore è disposto per la somma, per riprodurre un numero alle finestrelle, l'operatore non deve fare altro che inscrivere questo numero alle scale S, e dare un giro di manovella; un secondo giro farà apparire il doppio del primo numero; un terzo il triplo, e così via. Inscritto un certo numero alle finestrelle, se ne rappresentiamo un altro minore alle scale, e, disposto il commutatore per la sottrazione, diamo un giro di manovella, il secondo numero si sottrae dal primo, ed alle finestrelle apparisce il resto; ad un secondo, ad un terzo,...... giro di manovella, dal primo si sottrae il doppio, il triplo,...... del secondo.

L'analogia che esiste fra questa macchina e l'aritmometro Thomas, ci dispensa dall'entrare in particolari circa il suo uso nei varii calcoli numerici a cui può essere applicata.

Macchine algebriche.

Considerando la questione del calcolo automatico sotto il punto di vista della massima sua generalità, possiamo proporci di costruire una macchina atta a risolvere un'equazione, cioè capace di fornire i valori di una funzione quando si dànno alla variabile od alle variabili indipendenti dei valori determinati.

Teoricamente parlando, il problema generale ora enunciato può essere risolto. Tale è l'assunto che si propose di dimostrare lo Stamm nel suo bellissimo studio sull'*Automatica pura* (1), di cui faremo una breve analisi in seguito. Gli elementi cinematici di cui sono composti gli apparecchi ideati dallo Stamm, cioè i dischi integratori a rotella scorrevole simili a quelli applicati nei planimetri, ed i treni epicicloidali di ruote dentate, permettono la generazione dei movimenti espressi dalle varie funzioni algebriche e trascendenti, precisamente come il cilindro parzialmente dentato di Thomas permette di generare il movimento espresso dalla funzione *prodotto*.

L'applicazione pratica della teoria esposta dallo Stamm non fu fin qui tentata, ed anzi le poche macchine algebriche che si conoscono, come quelle di Babbage (1821), di Scheutz (1838) e di Wiberg (1863), sono fondate sopra principii ben diversi. Esse applicano quasi sempre il calcolo delle differenze, e, per conseguenza, ottengono i successivi valori di una funzione, per valori della variabile in progressione aritmetica, col mezzo di somme o di sottrazioni successive, partendo da alcuni valori direttamente calcolati e dalle corrispondenti differenze dei diversi ordini. Tuttavia anche queste macchine a differenze, benchè poco note e poco diffuse, sono della massima importanza per la loro applicazione al calcolo di molte tavole numeriche che si riferiscono alla Fisica ed all'Astronomia, al calcolo delle tavole dei logaritmi, delle linee trigonometriche, degli interessi, ecc. Alcune di queste macchine imprimono automaticamente i loro risultati successivi sopra lastre di piombo o di altra sostanza capace di ricevere un'impronta. Da queste si ottengono poi, colla galvanoplastica, le matrici stereotipate colle quali si può procedere direttamente alla stampa delle tavole stesse; in tal modo sono evitati non solo gli errori di calcolo, ma anche quelli di copia e di composizione coi caratteri mobili. La loro applicazione rappresenta adunque il mezzo più sicuro che si possegga oggidì per ottenere simili tavole assolutamente prive di errori.

Principio su cui sono fondate le macchine a differenze. — Dati i valori successivi $y_0, y_1, y_2, y_3.....$, di una funzione y, se si toglie il secondo dal primo, il terzo dal secondo, il quarto dal terzo, e così via, si ottengono le differenze:

$$\triangle y_0 = y_1 - y_0, \quad \triangle y_1 = y_2 - y_1, \quad \triangle y_2 = y_3 - y_2, ...;$$

le quali si chiamano le *differenze prime* delle quantità proposte.

(1) Stamm, *Essais sur l'automatique pure*. Milano 1863.

Se si opera allo stesso modo sopra queste differenze prime, si ottengono le *differenze seconde:*

$$\triangle^2 y_0=\triangle y_1-\triangle y_0,\quad \triangle^2 y_1=\triangle y_2-\triangle y_1,$$
$$\triangle^2 y_2=\triangle y_3-\triangle y_2, \ldots$$

Così, operando sulle differenze seconde, si ottengono le *differenze terze:*

$$\triangle^3 y_0=\triangle^2 y_1-\triangle^2 y_0,\quad \triangle^3 y_1=\triangle^2 y_2-\triangle^2 y_1,$$
$$\triangle^3 y_2=\triangle^2 y_3-\triangle^2 y_2, \ldots;$$

e così di seguito.

Se i valori proposti $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ sono in numero di $n+1$, non si può procedere che fino alla *differenza ennesima*, la quale consta di un solo termine $\triangle^n y_0$; se invece le quantità date formano una serie indefinita nei due sensi, allora si ottengono infiniti ordini di differenze, ed ognuno formato da infiniti termini. Se le quantità $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots$, sono in progressione aritmetica, le prime differenze sono costanti ed uguali alla ragione, tutte le altre sono zero.

Si consideri ora una funzione y, razionale, intiera, di grado n:

$$y=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots p_{n-1}x+p_n;$$

allora la teoria delle differenze dimostra che *se ad x si sostituiscono dei valori:*

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h, \ldots,$$

in progressione aritmetica, e si fanno le successive differenze dei valori assunti dalla funzione y, le differenze ennesime sono uguali fra di loro e date dalla formola:

$$\triangle^n f(a)=p_0h^n n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1.$$

Se adunque si conoscono n valori consecutivi della funzione y, e si calcolano le varie differenze di questi valori, fino all'ultima che è costante e data dalla formola precedente, si potrà, partendo da questa e passando col mezzo di successive somme o sottrazioni per tutte le altre, calcolare quanti altri valori si vogliano della funzione.

Suppongasi ad es. che:

$$y=x^4-3x^3+5x-9,$$

e che si vogliano calcolare i valori di y per i successivi valori intieri di x:

$$\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Basterà conoscere 4 valori consecutivi di y, e noi troveremo, colla sostituzione diretta, quelli corrispondenti ai valori 0, 1, 2, 3, di x. Questi valori, che sono rispettivamente:

$$-9, -6, -7, +6,$$

li disporremo nel quadro seguente, e troveremo le differenze successive fino alla terza. La quarta, costante, è data dalla formola generale precedente, ponendo:

$$h=1,$$
$$n=4,$$
$$p_0=1.$$

Si ottiene:

$$\triangle^4 f(a)=4.3.2.1=24.$$

.....	.....	.....	.....	.....	.....
−3	138	−117	86	−54	24
−2	21	−31	32	−30	24
−1	−10	1	2	−6	24
x	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$	$\triangle^4 y$
0	**−9**	**3**	**−4**	**18**	**24**
1	**−6**	**−1**	**14**	42	24
2	**−7**	**13**	56	66	24
3	**6**	69	122	90	24
4	75	191	212	114	.....
5	266	403	326	.....	.....
6	669	729	.....	.....	.....
7	1398	.....	.....	.....	.....
..	.....	.....	.....	.....	.....

Allora si può con tutta facilità, *sommando, a partire dalla quarta differenza costante 24, ciascun termine con quello della colonna precedente posto sulla stessa orizzontale, ottenere il termine che deve essere posto sotto a quest'ultimo*, e quindi calcolare i valori successivi della funzione proposta.

Consideriamo le altre due funzioni:

$$y=x^3;\quad y=x^2.$$

Nel primo caso basterà conoscere 3 valori di y, ad es. quelli corrispondenti ai valori 0, 1, 2, di x; la terza differenza è costante e data da:

$$\triangle^3 f(a)=3.2.1=6.$$

Nel secondo caso bastano 2 valori di y, ad es. quelli corrispondenti ai valori 0, 1, di x; la seconda differenza è costante e data da:

$$\triangle^2 f(a)=2.1=2.$$

I quadri seguenti indicano come, partendo dai cubi di 0, 1, 2 e dai quadrati di 0, 1, si ottengano, per via di semplici somme, i cubi ed i quadrati dei successivi altri numeri intieri.

x	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$	x	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$
0	**0**	**1**	**6**	**6**	**0**	**0**	**1**	**2**
1	**1**	**7**	12	6	**1**	**1**	3	2
2	**8**	19	18	6	2	4	5	2
3	27	37	24	6	3	9	7	2
4	64	61	30	6	4	16	9	2
5	125	91	36	...	5	25	11	2
6	216	127	.....	...	6	36	13	.....
7	343	.....	.....	...	7	49	...	.....
...	.....	.....	.....	...	...	.....	...	.....

In generale adunque nota una funzione intiera di grado n, e noti i valori di essa per n valori della variabile, in progressione aritmetica, si può procedere assai facilmente col metodo delle differenze alla ricerca di quanti altri valori successivi si vogliano. Applicando lo stesso metodo si potrà pure intercalare fra valori noti della funzione y, quanti altri valori intermedii siano richiesti, purchè corrispondenti sempre a valori della variabile in progressione aritmetica. La teoria delle differenze infatti dà l'espressione non solo dell'ultima differenza $\triangle^n f(a)$, costante, ma eziandio quella delle altre differenze in funzione dei coefficienti e dei valori conosciuti.

Abbiamo supposto che la funzione y sia di forma nota; in generale però il calcolo precedente si potrà applicare anche senza conoscere la funzione, purchè se ne conoscano i valori corrispondenti ad $n + 1$ valori della variabile. In tal caso si sa che la funzione è pienamente determinata, e, se i valori della variabile sono in progressione aritmetica, essa può ricavarsi applicando la formola d'interpolazione di Newton.

Macchina a differenze di Babbage.

Nel 1821 Carlo Babbage, di Londra, fu incaricato dal Governo inglese di costruire una macchina che potesse calcolare automaticamente delle tavole matematiche ed astronomiche. Il Babbage si fondò sul calcolo delle differenze. Nell'applicazione pratica però di questo fecondo principio, egli ebbe da superare tante difficoltà, che dovette limitare la costruzione del suo apparecchio per tavole a seconde differenze costanti, come la tavola dei quadrati dei successivi numeri intieri; e non fu che in seguito a molti tentativi, e ad una spesa immensa, che riuscì ad ottenere un meccanismo soddisfacente. Questa macchina ingegnosa, divenuta proprietà del Governo inglese, trovasi oggidì nel Museo del Collegio Somerset-House.

Essa è essenzialmente costituita da tre quadranti circolari, che diremo A, B, C, posti uno accanto all'altro nello stesso piano, e muniti di suoneria. La periferia di questi quadranti è divisa in 1000 parti eguali numerate, ed una lancetta, girevole sull'asse di ognuno di essi, serve ad individuare uno qualunque dei numeri segnati sulle divisioni. Ciascun quadrante ricopre un meccanismo così congegnato, che allorquando l'operatore preme un'apposita molla, la suoneria del quadrante conta il numero delle divisioni segnate dalla propria lancetta. Di più i meccanismi dei tre quadranti sono due a due collegati in modo che ad ogni colpo di suoneria del quadrante C, la lancetta del quadrante B vicino avanza di una divisione; e così ad ogni colpo di suoneria del quadrante B, la lancetta del quadrante A avanza pure di una divisione.

Ciò posto, supponiamo di disporre la lancetta di A sulla divisione 1, quella di B sulla divisione 3, e quella di C sulla divisione 2. Allora se si toccano più volte di seguito, e sempre nello stesso ordine, prima la molla di A, poscia quella di B, ed infine quella di C, ecco che cosa succede.

La suoneria di A suona 1; quella di B suona 3, e perciò fa avanzare la lancetta di A sulla divisione 4; quella di C suona 2, e quindi fa avanzare la lancetta di B sulla divisione 5.

Ad una seconda operazione si ripeterà una cosa analoga, cioè: la suoneria di A suona 4; quella di B suona 5 e porta la lancetta di A sulla divisione 9; quella di C suona 2 e porta la lancetta di B alla divisione 7.

Ad una terza operazione: la suoneria di A suona 9; quella di B suona 7 e porta la lancetta di A alla divisione 16; quella di C suona 2 e porta la lancetta di B alla divisione 7.

E così allo stesso modo per le successive altre operazioni, cosicchè la lancetta di A, ed anche la sua suoneria, indicano i quadrati dei successivi numeri intieri.

Macchina analitica di Babbage.

Oltre alla macchina a differenze di cui abbiamo fatto parola testè, l'illustre Babbage consacrò gran parte della sua vita e della sua fortuna ad un'altra macchina di maggior portata, che doveva eseguire in modo automatico tutte le operazioni analitiche ed aritmetiche che si richiedono per la risoluzione di un'equazione data. Il Babbage morì prima di aver completata la costruzione del suo apparecchio. Quanto ne fu eseguito appartiene oggidì al suo figlio, il generale Babbage: si trattò più volte di condurlo a termine, ma si dovette sempre indietreggiare di fronte alla spesa enorme che sarebbe necessaria, ed alle difficoltà dell'impresa (1).

Nota la formola relativa ad una questione da risolversi, la macchina analitica doveva, secondo il concetto di Babbage, svilupparla, applicare i coefficienti alle variabili, eseguire i calcoli aritmetici, e dare stampato il risultato finale numerico corrispondente. Suppongasi, per fissare le idee, che si tratti del prodotto di due binomii:

$$(a + bx)(c + dx) = ac + (bc + ad)x + bdx^2.$$

Una prima parte della macchina riceverà i coefficienti numerici designati colle lettere a, b, c, d e li trasporterà in una seconda parte, l'operatore, chiamato da Babbage il *mill* (il molino), ove le operazioni indicate si eseguiscono; da questa i risultati numerici che esprimono i coefficienti ac, $bc + ad$, bd, delle potenze di x, passano in una terza parte, che è quella delle variabili, ove ciascuna potenza di x riceve il suo coefficiente rispettivo.

I numeri si rappresentano, colle varie cifre disposte secondo linee verticali, mercè parecchie colonne di dischi circolari, sul contorno dei quali sono incise le cifre 0, 1, 2, ... 9 dell'alfabeto aritmetico. Ciascuna colonna comprende 20 dischi attraversati da un asse verticale; i varii dischi però possono muoversi l'uno indipendentemente dall'altro. I dischi di ciascuna colonna poi corrispondono successivamente alle unità, alle decine, alle centinaja, ...; di modo che disponendo una delle cifre di ciascun disco sopra una medesima generatrice della colonna, si può rappresentare un numero qualunque, anche di 20 cifre. Le diverse parti della macchina contengono varie serie di simili colonne di dischi, alcune delle quali sono destinate a ricevere quei coefficienti numerici, noti o preventivamente calcolati, che sono di applicazione continua nei diversi calcoli speciali da eseguirsi.

Tutte le operazioni automatiche eseguite dalla macchina, sono comandate da un *ordinatore meccanico*, simile ad un apparecchio assai conosciuto, quello di Jacquard, che serve alla fabbricazione delle stoffe. Col

(1) *Sur la machine analytique de Charles Babbage*. Note de M. le général L. F. MENABREA (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1884, pag. 179).

Il dotto nostro Menabrea descrisse questa macchina fin dal 1842, nella *Bibliothèque universelle de Genève*, n. 82, ottobre 1842. La sua Memoria fu tradotta in inglese, corredata da note della massima importanza, nelle *Scientific Memoirs*, vol. III, da Lady Ada Lovelace, la figlia unica di Lord Byron.

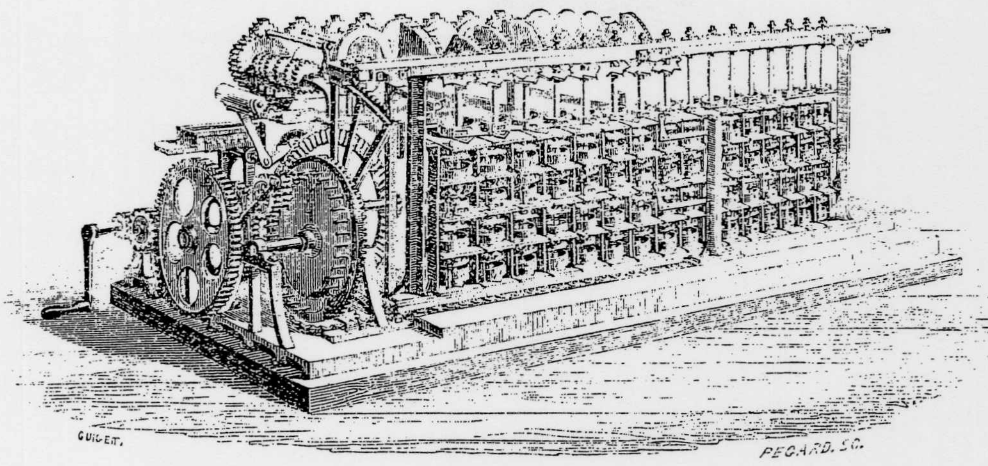


Fig. 677.

mezzo di cartoni bucati, a cui corrispondono le leve che sollevano i diversi fili della catena di una stoffa, si possono ottenere dei disegni svariati, che traducono secondo una legge nota quelli tracciati sui cartoni. Quest'idea fu applicata dal Babbage all'esecuzione automatica dei calcoli. Le formole ed i loro sviluppi, convenientemente espressi sui cartoni, sono presentati alla macchina, la quale, posta in movimento dall'operatore, fa le operazioni analitiche ed aritmetiche che le si domandano. Le soluzioni dei problemi col mezzo della macchina analitica devono potersi esprimere sotto forma algebrica, o sotto quella di serie convergente.

Macchina a differenze di Scheutz.

Nel settembre 1838 Giorgio Scheutz, editore di un giornale tecnologico a Stoccolma, annunciò, in una nota all'Accademia delle Scienze di Parigi, di aver inventata una macchina capace di calcolare automaticamente i valori successivi di qualsiasi funzione in cui le differenze quarte sono costanti. Questa macchina non fu completamente eseguita che molti anni dopo dallo Scheutz coadiuvato dal proprio figlio Edoardo, allievo dell'Istituto politecnico di Stoccolma. Con pochissime risorse, ma col loro lavoro personale e con rara tenacità di proposito, secondata dall'Accademia delle Scienze di Stoccolma e dalla Dieta svedese, essi riescirono a completare il loro apparecchio. Nel 1855 ne presentarono un esemplare, eseguito con ogni cura e sotto la loro direzione dal Bergstrom, di Stoccolma, all'Esposizione universale di Parigi, e ne ottennero la medaglia d'oro, in seguito a favorevole rapporto fatto dal Mathieu a nome della Classe VIII del Giurì internazionale. L'esemplare presentato a Parigi fu acquistato da un ricco negoziante degli Stati Uniti, sig. John Fr. Rathbone, ed offerto da lui all'Osservatorio Dudley ad Albany (Nuova-York). Un altro esemplare fu acquistato dal Governo inglese allo scopo di facilitare i calcoli del *Nautical almanac*.

Nella macchina algebrica di Scheutz è applicato lo stesso principio che è la base di quella di Babbage, cioè il calcolo delle differenze. L'apparecchio addizionatore però, ed il meccanismo dei riporti, come ebbe a dichiararlo il Babbage stesso, sono affatto diversi.

La parte calcolatrice della macchina, che ha in complesso le dimensioni di un piccolo pianoforte, è rappresentata nella parte anteriore della figura 677. Essa si compone di 15 assi verticali di acciajo, sopra ognuno dei quali possono ruotare 5 dischi od anelli, che portano incise sulla loro superficie convessa argentata le cifre 0, 1, 2,... 9. Questi anelli sono sostenuti da lastre orizzontali di ottone, e formano 5 piani, a ciascuno dei quali si può quindi leggere un numero di 15 cifre. Al piano superiore appariscono i risultati del calcolo, ed ai piani sottostanti le differenze prime, seconde, terze e quarte.

Questa macchina potrà adunque applicarsi al calcolo di qualsiasi specie di tavola numerica in cui le quarte differenze sono o possono ritenersi costanti nei limiti delle cifre esatte richieste. Essa si presta adunque non solo a determinare colla massima facilità ed esattezza i successivi valori di una funzione algebrica di quarto grado per la serie dei valori intieri della variabile, ma eziandio al calcolo delle tavole di assicurazione, delle tavole nautiche, di quelle dei logaritmi, dei logaritmi delle linee trigonometriche, ed anche delle linee trigonometriche naturali, perchè cambiando qualcuna delle parti della macchina, si può introdurvi la divisione sessagesimale.

I risultati, per le 8 prime cifre, sono impressi sopra di una lastra di piombo dalla macchina stessa, cosicchè rimangono anche perfettamente eliminati gli errori tipografici. Da parecchie esperienze eseguite colla macchina di cui abbiamo accennato, risulta che, manovrando la manovella dell'apparecchio con una velocità media, essa calcola e stereotipa ad un tempo circa 120 linee di numeri all'ora, e che produce, pronte per la stampa, 2 pagine e mezza di cifre, nel tempo necessario ad un compositore intelligente per disporre i caratteri di una sola pagina.

Macchina a differenze di Wiberg.

Un altro svedese, il Wiberg, presentava nel 1863, all'Accademia delle Scienze di Parigi (1), e poscia all'Esposizione universale tenuta nella stessa città l'anno 1867, una macchina algebrica fondata sul medesimo principio di quelle di Babbage e di Scheutz. Anche questa macchina è destinata al calcolo di funzioni a quarte differenze costanti, ed imprime automaticamente i risultati.

Ecco in qual ordine la macchina di Wiberg eseguisce le somme successive, per applicare il calcolo delle differenze. Segniamo la tavola generale dei valori della fun-

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1863, p. 330.

zione y, e delle varie differenze, fino alle quarte che supponiamo costanti.

y_0	$\triangle y_0$	$\triangle^2 y_0$	$\triangle^3 y_0$	$\triangle^4 y_0$
y_1	$\triangle y_1$	$\triangle^2 y_1$	$\triangle^3 y_1$	$\triangle^4 y_1 = \triangle^4 y_0$
y_2	$\triangle y_2$	$\triangle^2 y_2$	$\triangle^3 y_2$	$\triangle^4 y_2 = \triangle^4 y_0$
y_3	$\triangle y_3$	$\triangle^2 y_3$	$\triangle^3 y_3$	$\triangle^4 y_3 = \triangle^4 y_0$
y_4	$\triangle y_4$	$\triangle^2 y_4$	$\triangle^3 y_4$	$\triangle^4 y_4 = \triangle^4 y^0$
....	....	....	....	....

Ciascuno dei numeri di questa tavola, si può ottenere aggiungendo al numero posto immediatamente al di sopra il numero posto a destra di quest'ultimo. Così:

$$y_3 = y_2 + \triangle y_2; \qquad \triangle^2 y_2 = \triangle^2 y_1 + \triangle^3 y_1; \text{ ecc.}$$

Nella macchina di Wiberg si parte dai 5 numeri:

$$y_1,\ \triangle y_1,\ \triangle^2 y_0,\ \triangle^3 y_0,\ \triangle^4 y_0.$$

Facendo dare due giri alla manovella motrice, si eseguiscono nello stesso tempo due addizioni $y_1 + \triangle y_1$, $\triangle^2 y_0 + \triangle^3 y_0$, i cui risultati y_2 e $\triangle^2 y_1$ si sostituiscono ai numeri y_1 e $\triangle^2 y_0$; di modo che dopo questa operazione la macchina presenta i numeri:

$$y_2,\ \triangle y_1,\ \triangle^2 y_1,\ \triangle^3 y_0,\ \triangle^4 y_0.$$

Con due altri giri di manovella, si eseguiscono due altre addizioni $\triangle y_1 + \triangle^2 y_1$, $\triangle^3 y_0 + \triangle^4 y_0$, i risultati delle quali $\triangle y_2$ e $\triangle^3 y_1$, si sostituiscono ai numeri $\triangle y_1$ e $\triangle^3 y_0$; dopo questa seconda operazione la macchina presenta i 5 numeri:

$$y_2,\ \triangle y_2,\ \triangle^2 y_1,\ \triangle^3 y_1,\ \triangle^4 y_1 = \triangle^4 y_0.$$

Così i 5 numeri da cui si è partiti sono sostituiti da quelli che si trovano immediatamente al disotto di essi nella tavola generale data precedentemente.

Con altri quattro giri di manovella, si eseguiranno altre 4 addizioni, e la macchina presenterà i 5 numeri:

$$y_3,\ \triangle y_3,\ \triangle^2 y_2,\ \triangle^3 y_2,\ \triangle^4 y_2 = \triangle^4 y_0;$$

e così di seguito.

Ecco ora in che consiste la macchina, e come si operano le somme di cui abbiamo parlato.

Essa si compone essenzialmente di 75 dischi metallici perfettamente uguali, attraversati da un lungo asse, attorno al quale possono ruotare a dolce sfregamento e l'uno indipendentemente dall'altro. Ciascun disco presenta sul contorno 10 denti rettangolari, sulla fronte dei quali sono incise le cifre 0, 1, 2,...,.9. Questi dischi si possono far ruotare in modo da condurre contro un regolo indicatore, fissato parallelamente al loro asse comune, le cifre che si desiderano. L'insieme dei 75 dischi è diviso in 15 gruppi di 5 dischi ciascuno. Ogni gruppo corrisponde ad un ordine diverso di unità, cosicchè i numeri su cui si opera potranno avere anche 15 cifre: il primo gruppo a destra rappresenta le unità, il secondo le decine, il terzo le centinaja, ecc. I 5 dischi poi di ciascun gruppo corrispondono alle cifre dello stesso ordine dei 5 numeri y, $\triangle y$, $\triangle^2 y$, $\triangle^3 y$, $\triangle^4 y$: così le 15 cifre di y saranno segnate al primo disco di sinistra di ciascuno dei 15 gruppi; le 15 cifre di $\triangle y$ ai secondi dischi, partendo da sinistra, di questi 15 gruppi; e così via.

Ciò posto, supponiamo di aver condotto presso il regolo indicatore le diverse cifre dei numeri:

$$y_1,\ \triangle y_1,\ \triangle^2 y_0,\ \triangle^3 y_0,\ \triangle^4 y_0.$$

Le 75 cifre di cui questi 5 numeri si compongono, si troveranno tutte sulla stessa linea: le unità saranno segnate ai 5 dischi del primo gruppo di destra; le decine dai 5 dischi del gruppo vicino a sinistra, ecc. La prima cosa che deve fare la macchina, sarà, come abbiamo detto, di eseguire le due somme $y_1 + \triangle y_1$, $\triangle^2 y_0 + \triangle^3 y_0$.

A tale scopo è disposto, parallelamente all'asse comune dei 75 dischi, un secondo asse di rotazione munito di 30 lunghi denti o *diti*. Questo secondo asse può ruotare attorno al primo, e nel suo movimento i 30 diti si appoggiano contro i denti di cui sono muniti i dischi, producendone la rotazione e, per conseguenza, il cambiamento delle cifre presentate al regolo indicatore. I 30 diti portati dall'asse mobile sono divisi in 15 gruppi di 2 denti ciascuno, corrispondenti ai 15 gruppi in cui sono divisi i dischi: ciascun gruppo di due diti comanda due dischi non consecutivi del corrispondente gruppo di dischi, cioè il primo ed il terzo, od il secondo ed il quarto. La distanza poi fra le due diverse coppie di diti è tale che quando i due primi diti comandano, ad es., il primo ed il terzo disco del primo gruppo, anche tutte le altre coppie agiscono sul primo e sul terzo disco di tutti gli altri gruppi di dischi.

Quando si dà il primo giro di manovella, l'asse che porta i 30 lunghi denti ruota attorno ai 75 dischi, ed i 30 denti producono la rotazione di 30 dischi, cioè dei 15 dischi corrispondenti alle cifre di y_1, e dei 15 dischi corrispondenti alle cifre di $\triangle^2 y_0$. Però nel medesimo istante in cui incomincia il movimento di questi 30 dischi, un regolo dentato in forma di pettine viene ad appoggiarsi sul contorno dei 75 dischi. I denti di questo regolo sono disposti in guisa da lasciar passare liberamente nei vani che essi presentano, i denti dei 30 dischi spinti dai diti, e da arrestare invece i denti dei 45 altri dischi, i quali saranno così mantenuti perfettamente immobili. A questo modo ciascuno dei 30 dischi posti simultaneamente in movimento dai 30 diti, ruota a dolce sfregamento entro a due dischi tenuti fissi dal regolo dentato di cui abbiamo fatto parola.

La rotazione dei 15 dischi di y_1, e dei 15 dischi di $\triangle^2 y_0$, eseguisce le somme $y_1 + \triangle y_1$, $\triangle^2 y_0 + \triangle^3 y_0$. Per fissare le idee consideriamo i soli primi 15, e supponiamo che:

$$y_1 = 252;$$
$$\triangle y_1 = 344;$$

cosicchè $\qquad y_1 + \triangle y_1 = 596.$

Le due cifre delle unità, 2, 4, di questi due numeri sono rappresentate al primo ed al secondo disco di sinistra del gruppo delle unità, cioè del primo gruppo a destra. Uno dei 30 diti (il penultimo a destra), girando attorno all'asse dei 75 dischi, trascina con sè il primo disco di sinistra del gruppo delle unità. In seguito alla rotazione di questo disco, la cifra 2 che esso presenta presso il regolo indicatore diventa successivamente 3, 4, 5, 6; ma tostochè il 6 è stato condotto a sostituire il 2 primitivo, il dito che ha prodotto tale spostamento si rialza alquanto, in modo da allontanare la sua punta dal dente del disco che ha spinto. In tal modo questo dito, continuando il suo cammino coi 29 altri attorno all'asse comune dei dischi, cessa di trascinare quello su cui agiva precedentemente, e là cifra 6 di questo disco resta immobile presso il regolo indicatore. Ora il sollevamento del dito, e, per conseguenza, l'interruzione nel moto del disco che esso faceva ruotare precedentemente, è dovuta precisamente al disco immobile posto alla sua destra, cioè alla cifra 4 presentata da tale disco al regolo indicatore. Un prolungamento del dente che porta la cifra 5 di questo secondo disco, prolungamento che occupa una posizione od un'altra secondochè il disco presenta tale o tale altra cifra al regolo indicatore, è destinato ad agire sopra di una sporgenza fissata lateralmente al dito che fa girare il primo disco; tostochè questa sporgenza laterale del dito, girando attorno ai dischi, raggiunge il prolungamento di cui abbiamo parlato, il dito si rialza e cessa di agire sul disco su cui agiva dapprima. Se il secondo disco presentasse la cifra 0 presso il regolo indicatore, il dito corrispondente al primo disco si rialzerebbe fin dal principio del suo movimento, e, girando, non trascinerebbe punto il primo disco. Se il secondo disco presentasse la cifra 1 presso il regolo indicatore, il dito di cui parliamo spingerebbe il primo disco in modo da fargli fare $\frac{1}{10}$ di giro; poi la sua sporgenza laterale, incontrando il prolungamento del quinto dente del secondo disco, ne produrrebbe il sollevamento e quindi il riposo del primo disco. E così di seguito, per modo che il dito fa fare al primo disco tanti decimi di giro quante sono le unità rappresentate dalla cifra del secondo disco: la cifra che il primo disco presenta al regolo indicatore si trova dunque aumentata di questo stesso numero di unità.

Nello stesso tempo che il 29° dito, di cui ci siamo specialmente occupati, conduce il primo disco del gruppo delle unità a segnare presso il regolo indicatore la cifra 6, somma delle unità 2 e 4, il 27° dito conduce il primo disco del gruppo delle decine a segnare la cifra 9, somma delle decine 5 e 4, ed il 25° dito conduce il primo disco del gruppo delle centinaja a segnare la cifra 5, somma delle centinaja 2 e 3. Dopo che i 30 diti avranno fatto un giro intiero attorno ai 75 dischi, i 15 diti di ordine impari avranno sostituite alle cifre di y_1, portate dal primo disco a sinistra di ciascun gruppo, le cifre corrispondenti di y_2 cioè della somma $y_1 + \triangle y_1$. Nello tempo stesso i 15 altri diti, di ordine pari, avranno sostituito alle cifre di $\triangle^2 y_0$, portate dal terzo disco di ciascun gruppo, le cifre corrispondenti di $\triangle^2 y_1$ cioè di $\triangle^2 y_0 + \triangle^3 y_0$.

Nella spiegazione precedente si è supposto implicitamente che ciascuna somma parziale non dia un risultato maggiore di 9, cioè che non si renda necessario alcun riporto. L'esecuzione automatica dei riporti costituisce, come sappiamo, una delle più grandi difficoltà che si incontrano nella costruzione delle macchine calcolatrici: ecco come il Wiberg risolve in modo semplicissimo e sicuro la questione.

Abbiamo detto che sopra ciascun disco il dente che porta la cifra 5 presenta un prolungamento destinato ad agire sopra di una sporgenza laterale del dito che fa girare il disco vicino: questo stesso prolungamento serve eziandio ad eseguire i riporti. Suppongasi, ad es., che le cifre delle unità di y_1 e $\triangle y_1$ siano rispettivamente 8 e 7. Allora, mentre la manovella motrice fa la sua prima rivoluzione, il 29° dito farà avanzare il primo disco del gruppo delle unità di $\frac{7}{10}$ di giro, e condurrà così successivamente al regolo indicatore, invece della cifra 8 che si trovava dapprima, le cifre 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5. La cifra 8 sarà sostituita dalla cifra 5: vi ha dunque una decina da riportare al primo disco del gruppo delle decine. Però questo riporto non si fa immediatamente: esso è solamente preparato per essere eseguito in seguito. A tale scopo nell'istante medesimo in cui la cifra 0 del primo disco del gruppo delle unità viene a presentarsi presso il regolo indicatore, il prolungamento del quinto dente dello stesso disco agisce sopra un nuovo sistema di lunghi denti e diti disposto al disotto dell'insieme dei 75 dischi, e prepara uno di essi in modo da far poi avanzare in seguito di $\frac{1}{10}$ di giro il primo disco del gruppo delle decine, cioè di aumentare di un'unità la cifra che questo disco presenta al regolo indicatore. Con un primo giro di manovella si eseguiscono le due addizioni come si è detto precedentemente, senza tener conto dei riporti che sono registrati a parte nel secondo sistema di lunghi denti situato alla parte inferiore dell'apparecchio. Con un secondo giro di manovella, che produce la rotazione di un asse a palette lungo il secondo sistema di diti, si abbracciano tutti quei diti che furono spostati nel giro precedente, e si fa loro eseguire un movimento in virtù del quale ciascuno di essi aumenta di un'unità la cifra indicata dal disco corrispondente. L'asse a palette di cui abbiamo parlato è munito di 15 palette disposte secondo una superficie elicoidale; in virtù di questa disposizione le varie palette non agiscono che successivamente sui differenti diti destinati ad operare i riporti e, per conseguenza, è soddisfatta la condizione essenzialissima della trasmissione successiva dei riporti in quegli istanti in cui un riporto si deve estendere a più di una cifra.

Dopo che, con questi due giri di manovella, le addizioni $y_1 + \triangle y_1$, $\triangle^2 y_0 + {}^3 y_0$ sono state completamente eseguite, le parti che portano i due sistemi di lunghi denti ed il regolo dentato in forma di pettine subiscono uno spostamento longitudinale di lunghezza eguale allo spessore di ciascuno dei 75 dischi. In tal modo queste diverse parti sono disposte convenientemente per operare, con due nuovi giri di manovella, le due altre addizioni $\triangle y_1 + \triangle^2 y_1$, $\triangle^3 y_0 + \triangle^4 y_0$. Le stesse parti poi ritornano, con un nuovo spostamento longitudinale retrogrado, alla loro posizione primitiva per operare le somme $y_2 + \triangle y_2$, $\triangle^2 y_1 + \triangle^3 y_1$, e così di seguito.

Dopo ciascuna serie delle operazioni descritte, si possono leggere lungo il regolo indicatore i valori ottenuti per le quattro quantità y, $\triangle y$, $\triangle^2 y$, $\triangle^3 y$, prendendo per y la prima cifra di sinistra di ciascuno dei 15 gruppi; per $\triangle y$ la seconda cifra di questi gruppi, ecc. Ma la macchina imprime essa stessa in incavo, sopra lastre di piombo o di carta macerata, i valori ottenuti successivamente per la funzione y. Perciò di fianco al meccanismo di cui abbiamo parlato, il quale serve ad eseguire le addizioni, si trova un altro sistema di dischi in acciajo, simili ai 75 primi, e traversati come questi da un asse attorno al quale possono ruotare l'uno indipendentemente dall'altro. Questi nuovi dischi sono in numero eguale a quelli delle cifre di y che si vogliono conservare ed imprimere: ciascuno di essi porta 10 denti, la cui estremità presenta, in caratteri da stampa, le cifre 0, 1, 2, ... 9. Alcuni organi meccanici semplicissimi legano questi nuovi dischi a quelli dei 75 primi di cui devono riprodurre le indicazioni: ciascuna volta che uno dei primi dischi fa $\frac{1}{10}$ di giro, il disco stampatore che gli corrisponde ruota dello stesso angolo. Allorquando un nuovo valore della funzione y può leggersi ai primi dischi, esso è al tempo stesso rappresentato coi denti di acciajo in forma di caratteri da stampa dei secondi dischi: questi sono disposti l'uno accanto all'altro e presentano i valori di y colle cifre rivolte all'ingiù e disposte secondo una medesima generatrice. Allora una piccola tavola mobile, ricoperta da un foglio di piombo o di carta macerata, si innalza fino a raggiungere questi caratteri, e si appoggia fortemente contro di essi in modo da ricevere l'impronta del numero da essi formato. Dopo una prima impressione, la tavola si abbassa e riceve un piccolo spostamento longitudinale in modo da ricevere poco dopo l'impronta di un altro numero a lato di quello già ottenuto. È la stessa manovella motrice, che, dopo di avere eseguite le 4 somme componenti un'operazione completa, produce i movimenti automatici della tavola che deve ricevere l'impronta del nuovo valore di y.

Tale è nell'insieme e nel modo di agire l'ingegnosissima macchina di Wiberg. L'ipotesi che le quarte differenze della funzione di cui si tratta siano tutte uguali fra di loro, sembra doverne restringere di molto l'applicazione; tuttavia è facile di mostrare come essa si presti al calcolo dei successivi valori di numerosissime funzioni non solo algebriche, ma anche trascendenti. Suppongasi, ad es., che la macchina debba servire per calcolare e stampare una tavola di logaritmi a 7 cifre decimali. Le quarte differenze dei logaritmi dei successivi numeri intieri non sono costanti, e, per conseguenza, la macchina non potrà essere impiegata per calcolare questi logaritmi partendo da un solo primo valore e dalle differenze del primo, del secondo, del terzo, e del quarto ordine che gli corrispondono. Però osserviamo che le differenze quarte successive differiscono così poco le une dalle altre, che si possono, senza che l'errore proveniente da tale ipotesi influisca sulla settima cifra dei logaritmi, ritenere costanti per un intervallo abbastanza esteso. La macchina potrà adunque essere impiegata successivamente a cercare i logaritmi contenuti in ciascuno di questi intervalli, partendo ciascuna volta dai 5 dati numerici convenienti. I calcoli essendo eseguiti con 15 cifre decimali, gli errori provenienti dal fatto che i 5 numeri che servono di base non sono assolutamente esatti, e che le quarte differenze non sono rigorosamente costanti, si accumuleranno poco a poco, ed i risultati conterranno un numero successivamente minore di cifre decimali esatte; poichè non se ne debbono conservare che 7 nelle tavole, si potrà andare abbastanza lontani, senza aver bisogno di ricominciare una nuova serie di operazioni partendo da nuovi dati con 15 cifre decimali esatte come i precedenti. Così non si avrà che da determinare direttamente un certo numero di logaritmi convenientemente distanti in tutta l'estensione della tavola che si vuole ottenere: la macchina servirà a dedurre tutti i logaritmi intermedii. Questo procedimento presenta in sè un mezzo assai utile di controllo, poichè se, partendo da un logaritmo conosciuto per dedurne colla macchina tutti i logaritmi seguenti fino ad un nuovo logaritmo ugualmente conosciuto, si arriva a trovare per quest'ultimo un valore identico a quello che si conosceva dapprima, si sarà sicuri che l'apparecchio ha funzionato regolarmente e che ha dati esattamente tutti i logaritmi intermedii. Dalle matrici in incavo ottenute dalla macchina si ottengono poi le lastre in rilievo con cui si possono stampare direttamente le tavole che si vogliono stabilire.

Succede soventi che una differenza sia negativa, cosicchè in questo caso la somma di questa differenza con un'altra positiva si riduce ad una vera sottrazione. Benchè la macchina che abbiamo descritta non possa far altro che delle addizioni, tuttavia si può ridurre facilmente il caso della sottrazione a quello dell'addizione, sostituendo alla differenza negativa il suo complemento.

Quando si calcola una tavola dei valori successivi di una funzione non conservandone che un certo numero di cifre decimali, ad es. 7, si aggiunge ordinariamente una unità alla settima cifra decimale, allorchè l'ottava, che non si scrive, è una delle cifre 5, 6, 7, 8, 9. Si possono facilmente far fare queste modificazioni dalla macchina stessa, aggiungendo semplicemente 5 unità alla ottava cifra decimale del primo valore di y da cui si parte, senza per nulla cambiare le differenze impiegate nello stesso tempo: in questa maniera la settima cifra decimale data ed impressa dalla macchina avrà sempre il valore che deve avere, avuto riguardo al valore della cifra seguente.

Teoria generale delle macchine algebriche, secondo Stamm.

La risoluzione automatica di un'equazione, tentata già dal Babbage nella macchina analitica di cui abbiamo fatto parola, è completamente trattata e risolta, dal punto di vista teorico se si vuole, ma in modo assai ingegnoso, negli *Essais sur l'automatique pure* dello Stamm.

Qualsiasi equazione ad una variabile indipendente $y = F(x)$ può essere considerata come l'equazione del movimento di un punto lungo una data trajettoria. Basta supporre che la variabile indipendente rappresenti il tempo, e che la variabile dipendente rappresenti lo spazio, cioè l'arco di trajettoria descritto dal punto mobile alla fine di questo tempo: per mettere in evidenza tale ipotesi denoteremo soventi quest'equazione con $s = F(t)$.

Ciò posto, supponiamo di aver congegnato un meccanismo capace di trasformare un moto equabile di velocità nota, nel moto vario rappresentato dall'equazione $s = F(t)$. Il moto equabile sarà impresso al primo organo dell'apparecchio: dicendo 1 la sua velocità costante, lo spazio descritto alla fine di un tempo t qualsiasi rappresenta la stessa variabile indipendente t. Il movimento $s = F(t)$ sarà generato dall'ultimo organo del meccanismo, e quando l'organo motore, nel suo moto equabile, ha descritto uno spazio determinato t_1, l'organo generatore avrà descritto lo spazio corrispondente $F(t_1)$. Graduando opportunamente questi due organi estremi, cioè munendoli di un conveniente contatore atto a misurare gli spazii descritti, sarà possibile di misurare, da un lato i successivi valori che si dànno alla variabile t, e dall'altro lato i corrispondenti valori assunti dalla funzione $F(t)$.

Si immagini ora che il primo organo del meccanismo considerato descriva lo spazio t non più con moto equabile, ma con moto vario qualsiasi. L'organo motore si muoverà naturalmente con una legge diversa; però quando t ha raggiunto un valore determinato t_1, la s assume ancora il valore corrispondente $F(t_1)$. La cosa è manifesta quando si rifletta che nel nostro caso la variabile indipendente non può passare da un valore ad un altro, senza passare per tutti i valori intermedii e tradursi con un movimento continuo: per conseguenza la funzione prende in ciascun istante il valore che corrisponde a quello della variabile. Nelle macchine automatiche la nozione del movimento può quindi essere considerata come indipendente dal tempo; se adunque l'indice o la lancetta del contatore annesso al primo organo dell'apparecchio è portata, *con una legge qualsiasi*, a segnare un valore t_1, l'indice o la lancetta del contatore congiunto all'ultimo organo, segna il valore corrispondente $F(t_1)$.

Ecco il concetto fondamentale di tutte le macchine destinate al calcolo automatico. Le addizionatrici, l'aritmometro, e gli altri apparecchi già descritti, non sono, in ultima analisi, che applicazioni di questo principio; però la loro azione è limitata alla generazione dei movimenti rappresentati da un'equazione di primo grado. È egli possibile la risoluzione automatica di qualsiasi altra equazione, o, enunciando il problema sotto il punto di vista dell'Automatica, è egli possibile la trasformazione di un moto equabile in un moto vario rappresentato da un'equazione qualsiasi? Tale è la questione che lo Stamm si propone di risolvere nel caso più generale.

I meccanismi più conosciuti per la trasformazione di un moto equabile in un moto vario di legge nota $s = F(t)$, sono i cunei e gli eccentrici. Questi due organi meccanici, che lo Stamm comprende sotto la denominazione comune di *meccanismi direttori* o di *direttrici*, sono essenzialmente costituiti da una parte piana tagliata secondo il diagramma degli spazii del moto da prodursi, cioè secondo la linea che ha per equazione $s = F(t)$. Tale curva può essere rappresentata in coordinate cartesiane od in coordinate polari.

Nel primo caso, che, secondo la denominazione del nostro Giulio, corrisponde al cuneo, i tempi t sono rappresentati dalle ascisse, e gli spazii s dalle ordinate. Supponendo che il cuneo si muova di moto progressivo uniforme, nella direzione dell'asse dei tempi, e con velocità uguale al segmento che rappresenta l'unità di tempo, una stanghetta rettilinea obbligata a muoversi secondo l'asse degli spazii, ha il movimento $s = F(t)$.

Nel secondo caso, il meccanismo prende comunemente il nome di eccentrico; allora i tempi t sono rappresentati dagli angoli polari, e gli spazii s dai raggi vettori. Se l'eccentrico si muove di moto rotatorio uniforme attorno al polo, e con velocità angolare tale che nell'unità di tempo si deriva l'angolo che rappresenta il tempo 1, una stanghetta rettilinea obbligata a muoversi secondo una retta passante per il polo, sarà dotata del movimento $s = F(t)$.

I meccanismi direttori non sono applicabili che allorquando il movimento da generarsi ha durata ed ampiezza definite, ovvero è oscillatorio periodico. Nelle macchine algebriche invece si tratta sempre di produrre dei movimenti indefiniti: essi perciò non rappresentano la soluzione generale del nostro problema.

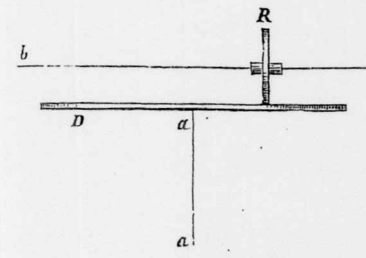


Fig. 678.

Integrazione automatica. Il generatore. — Allorquando si vuol trasmettere ad un asse di rotazione un moto vario di ampiezza indefinita, si impiega soventi un tamburo conico od a generatrice curvilinea, che comanda una puleggia mercè una cinghia munita di un conveniente apparecchio di tensione. Spostando la puleggia e la cinghia lungo il tamburo, si varia il rapporto dei raggi, e, per conseguenza, quello delle velocità. Invece di un cono si applica anche un disco D (fig. 678), congiunto invariabilmente ad un asse normale aa, ed una sottile rotella R, girevole attorno ad un asse bb parallelo al disco e passante per l'asse aa prolungato. Questa rotella R, che, per il proprio peso od in qualunque altro modo, è mantenuta aderente al disco D, può subire uno spostamento lungo il proprio asse di rotazione bb. Se adunque rimane costante la velocità angolare del disco motore D, la rotella R ruota di moto variabile, e con una legge che, come ora vedremo, rappresenta l'integrale di quella secondo cui ha luogo lo spostamento lungo il proprio asse bb.

Questo meccanismo, applicato già in molti apparecchi per eseguire delle quadrature, come nel dinamometro contatore di Poncelet e Morin, nel dinamometro integratore di Benthall, nel planimetro di Gonnella, ecc., è chiamato dallo Stamm il *generatore*. Quando il disco D comanda la rotazione, il generatore è *diretto;* quando invece l'organo motore è la rotella R, il generatore è *inverso*.

L'integrazione automatica si fa mediante un generatore diretto (fig. 679).

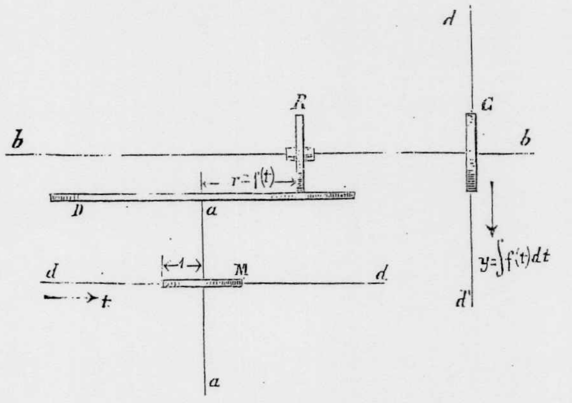


Fig. 679.

Il disco D sia dotato di moto rotatorio. Tale movimento, che possiamo ritenere equabile e con velocità angolare 1, può essere prodotto in modo qualunque: generalmente supporremo il suo albero aa comandato da una dentiera dd che imbocca con una ruota M di raggio 1. La dentiera dd e la ruota M hanno così un movimento rappresentato da t.

Immaginiamo che lo stesso disco D, col mezzo di opportuno meccanismo, produca lo spostamento longitudinale della rotella R secondo una legge nota $r = f(t)$. Allora in un intervallo di tempo infinitesimo dt la rotella R riceve una rotazione elementare $f(t)\,dt$, e quindi un movimento rappresentato dalla legge:

$$s = \int f(t)\,dt.$$

Questo movimento può essere trasmesso da una ruota C, calettata sull'asse di rotazione bb, e con raggio eguale a quello della rotella R, ad una seconda dentiera $d'd'$, un punto qualunque della quale sarà così dotato del movimento s.

Il moto di traslazione longitudinale $f(t)$ impresso alla rotella R *è adunque la derivata del movimento s trasmesso dalla rotella stessa*, od in altre parole, il movimento $f(t)$ rappresenta la legge delle velocità del movimento s.

Abbiamo detto che la rotazione t del disco D deve produrre la traslazione $f(t)$ della rotella R. Con quale meccanismo si effettuerà tale trasmissione di movimento? La cosa può essere ottenuta in due modi diversi che importa ben distinguere, cioè col mezzo di una direttrice ovvero senza direttrice.

Ottenuta la derivata $f(t)$ del movimento $\int f(t)\,dt$ da generarsi, possiamo costrurre la direttrice cartesiana o polare corrispondente, cioè la linea che ha per equazione $s = f(t)$. Questa direttrice (cuneo od eccentrico), posta in movimento dalla stessa ruota motrice M del disco D col mezzo di organi semplicissimi facili ad immaginarsi in ogni caso, produrrà lo spostamento $f(t)$ della rotella R.

Tale procedimento è quasi sempre preferibile a quello di generare direttamente con una direttrice il moto $\int f(t)\,dt$, perchè sovente la curva che rappresenta la derivata è meno sinuosa di quella che è il luogo geometrico della funzione proposta. Tuttavia esso non costituisce la soluzione generale del problema da risolversi, e non deve essere applicato che allorquando è impossibile seguire altra via, cioè in quei casi in cui il moto da generarsi non è rappresentabile con un'equazione, o si tratta di evitare degli apparecchi complicatissimi: esso appartiene a quella parte dell'Automatica che lo Stamm chiama *impura*.

Nell'Automatica pura, invece, la generazione di un movimento indefinito, rappresentabile con un'equazione, si ottiene senza direttrici, eseguendo automaticamente, col mezzo di tre soli organi semplici, la retta, il cerchio ed il piano, le operazioni indicate in questa equazione dalle espressioni letterali e dai segni.

Vediamo come questi elementi siano sufficienti per la generazione di una funzione $F(x)$, di qualsiasi forma, algebrica o trascendente.

Caso in cui le derivate successive della funzione proposta terminano a zero. — Un caso in cui il problema può essere risolto abbastanza facilmente è quello in cui il movimento $s = F(t)$ da generarsi è rappresentato da una funzione algebrica del tempo, le cui derivate successive terminano a zero. Allora la generazione automatica del movimento proposto si può ottenere con una *genealogia*, cioè con una serie di generatori, di cui ciascuna rotella produce la traslazione longitudinale della rotella seguente.

Ecco il procedimento generale da seguirsi in questo caso.

Si calcolano tutte le derivate della funzione proposta, fino all'ultima, che è zero. Si considera poscia un generatore, il cui disco supporremo dotato di moto equabile con velocità angolare 1; una ruota di raggio 1 fissata sull'asse di questo disco ha il movimento t; l'asse del disco stesso rappresenta l'ultima derivata, zero, ed una seconda ruota di raggio eguale alla seconda derivata, costante, ha un movimento rappresentato dalla terz'ultima derivata che è del primo grado. Col mezzo di una dentiera rettilinea, quest'ultima ruota produce lo spostamento della rotella R *lungo un raggio del disco D; la rotella R si sviluppa allora sul disco, e, come si è veduto, riceve un movimento rotatorio rappresentato dall'integrale della derivata di primo grado, cioè dalla derivata precedente, del secondo grado. Con una seconda dentiera il movimento alla periferia di questa rotella, è trasmesso, come moto di traslazione, alla rotella di un secondo generatore dotato dello stesso movimento che ha il primo; si ottiene così, con una nuova integrazione, la derivata del terzo grado. Analogamente, il moto ottenuto dalla seconda rotella serve ad operare la traslazione della rotella di un terzo generatore, e così di seguito finchè si sia ottenuto, per via di successive integrazioni, il movimento rappresentato dall'equazione proposta.*

Un contatore che misuri lo spazio descritto da un punto preso sul contorno della ruota di raggio 1 fissata sul primo asse, permetterà di misurare il valore preso, in un istante qualsiasi, dalla variabile indipendente; un secondo contatore che misuri lo spazio descritto dall'ultima rotella del meccanismo, darà, nel medesimo istante e qualunque sia la legge con cui ha avuto luogo il movimento dell'asse motore, il valore corrispondente assunto dalla funzione.

Vediamo qualche esempio:

Generazione dei movimenti rappresentati da

$$Ax^m,\quad Ax^{\frac{1}{m}},\quad Ax^{\frac{m}{n}},$$

ove m ed n sono numeri intieri e positivi.

Per fissare le idee supponiamo:

$$y = x^4$$

Le successive derivate della funzione x^4 sono:

$$4x^3,\quad 4.3.x^2,\quad 4.3.2.x,\quad 4.3.2,\quad 0.$$

Ciò posto, consideriamo un generatore (fig. 680) di cui la ruota M, di raggio 1, ha il movimento x, ottenuto col mezzo della dentiera dd. Sull'asse aa di questo generatore è calettata la ruota N di raggio 4. 3. 2.; questa ruota comanda una dentiera $d'\,d'$, la quale, incurvandosi attorno al disco D, produce lo spostamento della rotella R lungo il proprio asse di rotazione: supponiamo che per $x = 0$ la rotella R sia nel centro del disco D.

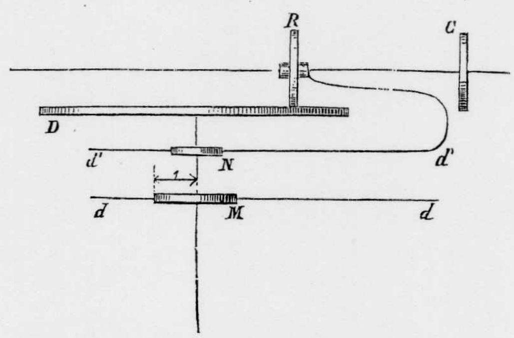


Fig. 680.

Allorquando la dentiera motrice dd od il contatore portato dalla ruota M segna un certo valore di x, un punto qualunque alla periferia della ruota N ha descritto un arco $4.\,3.\,2.\,x$, rappresentato dalla terz'ultima derivata, di primo grado, e, per conseguenza, la rotella R dista del centro del disco D precisamente della quantità $r = 4.3.2.x$. Per un intervallo di tempo infinitesimo dx un punto alla circonferenza della rotella avanza di un arco elementare $4.\,3.\,2.\,x.\,dx$, cosicchè il movimento trasmesso dalla ruota C sarà:

$$\int 4.3.2.x.\,dx = 4.3.x^2$$

cioè è rappresentato dalla seconda derivata, di secondo grado.

Consideriamo ora un secondo generatore, non rappresentato in figura, identico al precedente, munito ancora della ruota M di raggio 1 dotata del movimento x, ma privo della ruota N e della corrispondente dentiera $d'd'$. La rotella R di questo secondo generatore, posta ancora al centro del proprio disco al principio del movimento, sia invece spostata longitudinalmente col mezzo di una dentiera comandata dalla ruota C del generatore precedente, cosicchè si abbia $r' = 4.3.x^2$. La ruota C di questo secondo generatore sarà dotata di un movimento rappresentato da:

$$\int 4.3.x^2.dx = 4x^3.$$

Ripetendo la medesima operazione sopra un terzo generatore congiunto al secondo come il secondo è congiunto al primo, si avrà $r'' = 4x^3$, ed il movimento della sua ruota C sarà infine espresso da:

$$\int 4x^3.dx = x^4.$$

Trattandosi di generare Ax^4 basta moltiplicare per A, o il movimento finale, o quello dell'organo motore, od anche il movimento finale di uno qualunque dei generatori della genealogia. Moltiplicheremo ad es. per A il raggio della ruota N del primo generatore: questo raggio diventa 4. 3. 2. A, ed i movimenti trasmessi dalle ruote C dei generatori diventano rispettivamente

$$4.3.Ax^2,\ 4Ax^3,\ Ax^4.$$

In generale, dovendo generare un movimento rappresentato da Ax^m, *ove* m *è intiero e positivo, si stabiliscono le derivate successive:*

$$mAx^{m-1},\quad m(m-1)Ax^{m-2},\ldots..$$
$$m(m-1)(m-2)\ldots..\ [m-(m-1)]\ A;$$

si costruiscono $m-1$ *generatori, di cui ciascuna rotella è spostata lungo il proprio asse di rotazione da una dentiera posta in movimento dalla ruota finale del generatore precedente, e si dà alla ruota* N *che comanda la rotella del primo generatore un raggio:*

$$m(m-1)(m-2)\ldots..\ [m-(m-1)]\ A.$$

Tutti i generatori devono avere il medesimo movimento x*; le loro ruote motrici* M *saranno perciò comandate da una dentiera o da qualsiasi altra trasmissione semplice.*

Le cose possono anche essere disposte in modo che le ruote C successive generino le potenze semplici x^2, x^3, ... x^m. Invece di trasmettere direttamente il movimento di ciascuna ruota N al centro della rotella R seguente, basta stabilire delle ruote intermedie (*Intermédiaires-coefficients*) di raggio conveniente. Così affinchè il movimento 4. 3. x^2 trasmesso dalla ruota C del primo generatore diventi x^2, si deve dividere il raggio 4. 3. 2. della ruota N per 4. 3: questo raggio diventa allora $\frac{4.3.2.}{4.3.} = 2$. Le rotelle degli altri due generatori avranno allora i movimenti $\frac{4.x^3}{4.3.} = \frac{1}{3}x^3$, $\frac{x^4}{4.3.}$. Affinchè il movimento $\frac{1}{3}x^3$ trasmesso dalla ruota C della seconda rotella diventi x^3 basterà introdurre una ruota intermedia di raggio 3, la quale influisce eziandio sul movimento trasmesso dalla ruota C del terzo generatore. Questo movimento diventa $\frac{1}{4}x^4$, e sarà ridotto ad x^4 con una ruota intermedia di raggio 4.

La generazione del movimento $y = Ax^m$ si ottiene quindi con una genealogia di generatori diretti. Se, non cambiando per nulla il meccanismo descritto, ne comandiamo il movimento per mezzo della ruota C dell'ultimo generatore, allora la genealogia diventa *inversa*. Quale sarà in questo caso il movimento generato dalla prima ruota M? Nella genealogia diretta i movimenti delle rotelle dei vari generatori, cominciando dal primo, sono rappresentati dai successivi integrali della funzione che esprime il movimento della ruota N della genealogia; a primo esame parrebbe adunque che nella genealogia inversa le successive rotelle, partendo dall'ultima, dieno le derivate successive della funzione che esprime il movimento dell'ultima rotella, che ora è diventata motrice. La cosa è ben diversa, poichè l'invertire la genealogia diretta che genera $y = Ax^m$, equivale a considerare y come la variabile ed x come la funzione. Mentre adunque l'ultima rotella della genealogia inversa ha il movimento motore y, la ruota M del primo generatore genera il movimento:

$$x = \sqrt[m]{\frac{1}{A}y} = \left(\frac{1}{A}y\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Dunque quando si deve generare il movimento:

$$x = \sqrt[m]{y},$$

si costruisce una genealogia diretta per la generazione di $y = x^m$, *poi, considerando come motrice la ruota finale del meccanismo, si imprime alla medesima il movimento* y*; la prima ruota* M *genera allora il movimento* x.

Ottenuta a questo modo una genealogia inversa che permette di ottenere $\sqrt[n]{y}$, se si comanda la sua ruota motrice col mezzo della ruota finale di una genealogia diretta che dà il movimento $y = x^m$, la prima ruota M della genealogia inversa genera il movimento $x^{\frac{m}{n}}$.

In generale adunque, essendo richiesto un movimento $Ax^{\frac{m}{n}}$, *ove* x *rappresenta una funzione qualunque, si costruiscono due genealogie, l'una per ottenere* x^m, *e l'altra per ottenere* x^n*; si imprime il movimento* x *alla prima ruota* M *della prima genealogia, e si comanda l'ultima ruota* C *della seconda genealogia colla ruota finale della prima; infine si moltiplica il movimento ottenuto nella seconda genealogia od inversa per* A, *col mezzo di una ruota intermedia di raggio conveniente.*

Generazione del movimento rappresentato da un polinomio intero e razionale ad una variabile, della forma:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots.. \quad + Qx + K.$$

Diciamo in generale $y = F(x)$ il movimento prodotto da un generatore, di cui il movimento del disco è x ed il movimento di traslazione della rotella è $F'(x)$. Se per $x = o$ supponiamo che la rotella R di questo generatore non sia nel centro del proprio disco, come fin qui si è supposto, ma bensì ad una distanza $r_o = q$, in un istante qualunque del movimento si ha:

$$r = F'(x) \pm q.$$

In un intervallo infinitesimo di tempo dx un punto alla circonferenza della rotella descrive un arco elementare $[F'(x) \pm q]\,dx$ ed è dotato, per conseguenza, di un movimento:

$$F(x) \pm qx.$$

Se il disco ha un movimento $\varphi(x)$, lo spostamento elementare della rotella diventa $[F'(x) \pm q]\ d\varphi(x)$, e quindi il suo moto sarebbe:

$$\int [F'(x) \pm q]\,\varphi'(x)\,dx.$$

Si tratti ad es. di generare il movimento rappresentato dall'equazione:

$$y = \mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^3 + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{K}.$$

Calcoliamo le successive derivate di questo polinomio:

$$4\,\mathrm{A}x^3 + 3\,\mathrm{B}x^2 + 2\,\mathrm{C}x + \mathrm{D};$$
$$4\,.\,3\,.\,\mathrm{A}x^2 + 3\,.\,2\,.\,\mathrm{B}x + 2\,\mathrm{C};$$
$$4\,.\,3\,.\,2\,\mathrm{A}x + 3\,.\,2\,.\,\mathrm{B}:$$
$$4\,.\,3\,.\,2\,.\,\mathrm{A};$$
$$0.$$

Allora si costruisce una genealogia di tre generatori: si dà alla ruota N del primo il raggio 4 . 3 . 2 . A, e si porta la rotella R del primo generatore ad una distanza 3 . 2 . B dall'asse del proprio disco, la rotella del secondo generatore ad una distanza 2 C, e la rotella del terzo alla distanza D. Queste tre rotelle generano allora i movimenti rappresentati da:

$$4\,.\,3\,\mathrm{A}x^2 + 2\,.\,3\,.\,\mathrm{B}x;$$
$$4\,\mathrm{A}x^3 + 3\,\mathrm{B}x^2 + 2\,\mathrm{C}x;$$
$$\mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^3 + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x.$$

Aggiungendo K al risultato finale si ottiene y. Questa addizione può anche farsi cambiando il punto di partenza del movimento finale.

Se alcuno dei termini del polinomio proposto fosse negativo, lo spostamento primitivo della rotella corrispondente sul proprio disco, dovrebbe aver luogo nel verso negativo.

In generale adunque, quando si deve generare un polinomio intiero e razionale ad una variabile, della forma:

$$\mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m-1} + \mathrm{C}x^{m-2} + ... + \mathrm{Q}x + \mathrm{K};$$

si costruisce una genealogia di $m-1$ *generatori diretti, si dà alla ruota* N *del primo un raggio* 1 . 2 . 3 . ... m . A, *alle successive rotelle* R *gli spostamenti preliminari* 1 . 2 . 3 . .... $(m-1)$ B, 1 . 2 . 3 . .... $(m-2)$ C, ... Q, *ed al movimento finale uno spostamento* K.

Caso generale. — Dobbiamo ora supporre che la funzione F (x) da generarsi sia di forma qualsiasi. Allora è necessario di tradurre in movimenti le singole operazioni indicate nella funzione di cui si tratta. Lo Stamm risolve la questione col mezzo di generatori, e di varii altri meccanismi opportunamente combinati.

La somma e la sottrazione automatica di due funzioni si ottengono coll'ingegnoso meccanismo chiamato sistema differenziale, o treno epicicloidale di ruote dentate; le potenze intiere e positive della variabile, coll'integratore di cui abbiamo parlato precedentemente; invertendo le integrazioni successive, cioè facendo dell'organo generatore della genealogia l'organo motore, la ruota che col suo movimento rappresentava dapprima la funzione derivata del primo grado, genera i radicali; la combinazione dell'integratore diretto con quello inverso permette di ottenere le potenze frazionarie; la differenziazione automatica si ottiene con uno speciale apparecchio, il differenziatore; combinando convenientemente gli integratori diretti od inversi, od anche applicando i differenziatori, si ottiene la moltiplicazione e la divisione automatica; le linee trigonometriche si ottengono con un cerchio trigonometrico; uno speciale meccanismo infine permette di generare i movimenti rappresentati dalle funzioni esponenziali e da quelle trascendenti.

Mercè questi meccanismi è possibile la generazione automatica di qualsiasi movimento di legge conosciuta. L'apparecchio allora può servire non solo alla risoluzione numerica dell'equazione che rappresenta tale movimento, ma eziandio a discuterne gli stati, le variazioni, i segni, a riconoscerne le radici, i valori immaginarii, a verificare i principali teoremi della teoria generale delle equazioni, ecc. Le più importanti formole della scienza, come quella di Bernouilli, quella di Taylor, quella di Mac-Laurin per le osservazioni sperimentali, ecc., potrebbero così essere discusse ed applicate assai facilmente, col mezzo dei corrispondenti apparecchi automatici.

Fermiamoci sopra i principali meccanismi di cui abbiamo parlato.

Addizione e sottrazione automatica. Treno epicicloidale. — L'apparecchio che serve per eseguire la somma o la sottrazione di due movimenti, è il treno epicicloidale rappresentato nella figura 681.

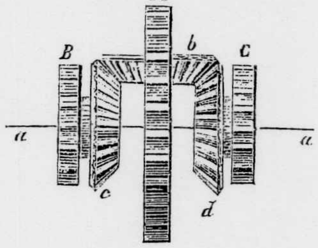


Fig. 681.

Sull'asse di rotazione aa gira liberamente una ruota cilindrica A, e sopra uno dei raggi di questa ruota, preso come asse, trovasi una ruota conica b, che imbocca con due altre ruote coniche c, d, girevoli sullo stesso asse aa. Se per un istante qualsiasi del movimento indichiamo con Ω, ω, ω', le velocità angolari delle ruote A, c, d, si dimostra facilmente che Ω è la semisomma di ω e di ω'.

Ed invero, imprimiamo col pensiero alle tre ruote A, c, d una velocità angolare uguale e contraria alla velocità Ω della ruota A. Allora l'asse attorno a cui gira la ruota conica b rimane in riposo, e, per conseguenza, le velocità angolari di cui saranno dotate le ruote coniche c e d, devono essere uguali e di segno contrario: ma coll'aggiunta della velocità angolare $-\Omega$, le ruote c e d avranno rispettivamente le velocità angolari $\omega - \Omega$ e $\omega' - \Omega$, dunque:

$$\omega - \Omega = \Omega - \omega';$$

cioè: $$\Omega = \frac{1}{2}(\omega + \omega').$$

Suppongasi ora che alle due ruote coniche c e d siano invariabilmente congiunti i due rocchetti cilindrici B e C, identici fra di loro, e con raggio eguale alla metà del raggio della ruota A; allora se V, v, v', rappresentano le velocità alla circonferenza delle tre ruote cilindriche A, B, C, si ha evidentemente:

$$\mathrm{V} = v + v'.$$

Se adunque si fa descrivere da un punto alla periferia della ruota B un arco $f(t)$, e da punto alla periferia della ruota C un arco $\varphi(t)$, un punto posto alla periferia della ruota centrale A descrive un arco F (t) tale che:

$$\mathrm{F}(t) = f(t) + \varphi(t);$$

giacchè le velocità di questi tre movimenti soddisfano alla relazione:

$$\frac{d\,\mathrm{F}(t)}{d\,t} = \frac{d\,f(t)}{d\,t} + \frac{d\,\varphi(t)}{d\,t}.$$

Ecco dunque un meccanismo che rappresenta l'equazione:

$$a = b + c.$$

Disponendo sopra ciascuna delle tre ruote un contatore, se si fanno ruotare due ruote in modo che le lancette dei contatori segnino i numeri corrispondenti a due termini dell'equazione precedente, la terza indicherà il numero che soddisfa all'equazione stessa. Questo meccanismo permette quindi di ottenere la somma algebrica di due quantità finite variabili od invariabili, avendo riguardo di cambiare il verso alla rotazione allorquando si tratta di quantità negative.

Generazione del movimento rappresentato dal prodotto di due o più funzioni. — Siano u e v due funzioni di una stessa variabile; si tratta di generare il movimento $u\,v$.

Osserviamo che:

$$d\,.\,uv = u\,.\,dv + v\,.\,du.$$

Perciò consideriamo due generatori (fig. 682). Alla ruota M del primo imprimiamo il movimento u, e, col mezzo di una dentiera $m\,m$ trasmettiamo questo movimento al centro della rotella R' del secondo, cosicchè si ha $r' = u$. Alla ruota M' del secondo generatore imprimiamo il movimento v, e, col mezzo della dentiera $m'\,m'$, trasmettiamo questo movimento al centro della ruota R del primo, per modo che si ha $r = v$. La rotella R avrà un moto rotatorio elementare $v\,.\,du$, e la rotella R' il movimento elementare $u\,.\,dv$.

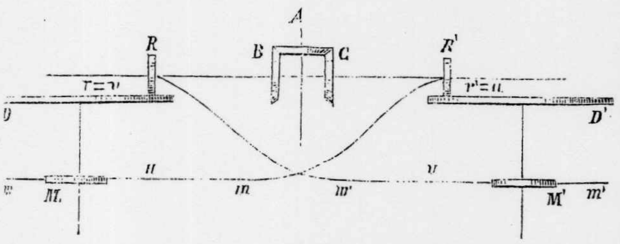


Fig. 682.

Le ruote B e C, che trasmettono i movimenti delle due rotelle R ed R', disponiamole come ruote esterne di un treno epicicloidale addizionatore. La ruota A mediana di questo treno ha un raggio doppio di quello delle due ruote uguali B e C, perciò l'arco elementare descritto da un punto alla periferia della ruota A è $v\,.\,du + u\,.\,dv$, cioè $d\,.\,uv$. Il movimento trasmesso dalla ruota A sarà dunque uv.

Se si tratta di generare il movimento rappresentato da un prodotto di tre funzioni $u\,v\,z$ di una medesima variabile, osserviamo che:

$$d\,.\,uvz = uv\,.\,dz + uz\,.\,dv + vz\,.\,du.$$

Perciò si ottengono separatamente i tre moti $u\,v$, $u\,z$, $v\,z$; poscia si prendono tre generatori, ai dischi dei quali si imprimono i movimenti z, v, u, ed alle loro rotelle si trasmettono le traslazioni $u\,v$, $u\,z$, $v\,z$. Infine si sommano due dei tre movimenti così ottenuti $uv\,.\,dz$, $uz\,.\,dv$, $vz\,.\,du$ col mezzo di un treno epicicloidale, e con un altro treno simile si addiziona il movimento totale così ottenuto al terzo. La ruota finale dell'apparecchio riceve allora uno spostamento elementare $d\,.\,uvz$, e quindi il movimento uvz.

Allo stesso modo si può procedere per la generazione di un movimento rappresentato da un numero qualunque n di funzioni della stessa variabile. Se si suppone che tutti i fattori siano uguali fra di loro, l'apparecchio deve essere equivalente alla genealogia diretta capace di generare x^n; la cosa è facile a verificarsi in ogni caso (1).

Generazione del movimento rappresentato da un quoziente. Trattisi di generare il movimento $u = \frac{1}{v}$.

Osserviamo che $uv = 1$. Consideriamo adunque l'apparecchio precedentemente descritto, e facciamo

$$u = 1\,.\,v = 1\,;$$

la ruota A prende allora una certa posizione che renderemo fissa. Allora è evidente che se si imprime il movimento v ad uno dei dischi, l'altro genera il movimento richiesto $u = \frac{1}{v}$.

In modo simile si può generare il movimento $u = \frac{y}{v}$.

Generazione del movimento rappresentato da x^{-m}. — Lo stesso apparecchio serve alla generazione di:

$$y = x^{-m}, \text{ poichè } x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

Con una genealogia diretta si genera x^m, e coll'apparecchio testè descritto si ottiene $\frac{1}{x^m}$.

Allo stesso modo può essere generato il movimento:

$$y = \mathrm{A}\,x^{-\frac{m}{n}} = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt[n]{x^m}}.$$

Generazione del movimento rappresentato da un'equazione algebrica. — Possiamo adunque considerare come risolto il problema di generare, con una sola operazione, un polinomio ad una variabile, della forma:

$$\mathrm{A}\,x^m + \mathrm{B}\,x^{m-1} + \mathrm{C}\,x^{m-2} + \dots + \mathrm{Q}\,x + \mathrm{K},$$

ove m è positivo o negativo, intiero o frazionario. Ciascun termine di questo polinomio si genera col mezzo di uno degli apparecchi precedentemente descritti, applicato in modo da ottenere la massima semplicità dei meccanismi (2); la loro somma algebrica si ottiene congiungendo tutti questi meccanismi mediante treni epicicloidali. Giova ricordare però, che allorquando m è intiero e positivo, il polinomio considerato si può generare col mezzo di una semplice genealogia di generatori diretti, spostando convenientemente, prima d'iniziare il movimento, le rotelle dei diversi generatori e l'organo finale dell'apparecchio.

Veniamo ora alla generazione automatica delle funzioni non algebriche.

(1) La generazione del movimento rappresentato dal prodotto di due o più funzioni può essere eziandio ottenuta col mezzo di un altro apparecchio, il differenziatore. Per la descrizione e le applicazioni di questo meccanismo vedasi STAMM, op. cit., pag. 17.

(2) Un mezzo che permette sovente di ottenere una semplificazione notevole nei meccanismi, consiste nel calcolare la serie degli integrali, che sono generati dalle successive rotelle delle genealogie corrispondenti ad alcune funzioni fondamentali con cui si possono considerare come composte molte altre funzioni. Cercando in questa serie il termine simile a quello da generarsi, è facile scorgere la genealogia più semplice all'uopo, e talvolta anche valersi, per la generazione di un termine, in tutto od in parte della genealogia che serve alla generazione di un altro termine. Allo stesso intento serve la tabella delle espressioni algebriche che si ottengono dalle successive rotelle quando queste genealogie sono rese inverse (STAMM, op. cit., pag. 25).

Generazione dei movimenti rappresentati da funzioni esponenziali e logaritmiche. — Il calcolo infinitesimale dimostra che le successive derivate di a^x sono:

$$a^x \log. a, \quad a^x (\log. a)^2, \quad a^x (\log. a)^3, \ldots ,$$

ove la notazione log. esprime logaritmi neperiani.

Se $a = e$, si ha log. $a = 1$; perciò le successive derivate di e^x sono sempre eguali ad e^x.

In questi casi adunque la velocità del movimento da generarsi è funzione dello spazio.

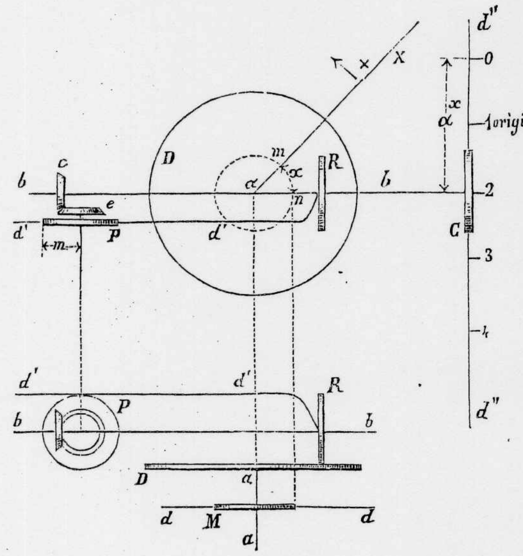


Fig. 683.

Ricordate queste cose, consideriamo un generatore, di cui la fig. 683 rappresenta le due projezioni orizzontale e verticale. Il disco D di questo generatore ha il movimento x, ottenuto col mezzo di una dentiera dd che agisce sulla ruota M, di raggio 1, calettata sull'asse $a\,a$ del disco. La rotella R produce la rotazione dell'asse $b\,b$ parallelo al disco e passante per il prolungamento di $a\,a$, ma è scorrevole lungo l'asse stesso bb. La rotazione di questo asse è trasmessa, col mezzo delle due ruote coniche uguali c, e, ad una ruota cilindrica P, il cui raggio chiameremo m; mediante la dentiera $d'\,d'$, tale ruota P produce lo spostamento longitudinale della rotella R. Finalmente il moto rotatorio preso dalla rotella R è trasmesso, mercè la ruota C uguale alla rotella stessa e calettata sull'asse bb, alla dentiera finale $d''d''$. Su questa dentiera portiamo una serie indefinita di divisioni, corrispondenti ai numeri 0, 1, 2, 3, ...; per semplicità intenderemo che tale dentiera graduata rappresenti il contatore destinato a misurare gli spazii descritti nel movimento trasmesso dalla rotella R.

Consideriamo il raggio del disco D che all'origine del movimento è parallelo all'asse $b\,b$ della rotella. Allorquando un punto posto sul contorno della ruota motrice M ha descritto un arco x, questo raggio avrà presa la posizione $a\,$X: tracciando sul disco una circonferenza di raggio 1, l'arco x è rappresentato in vera grandezza dall'arco mn di questa circonferenza compreso fra $a\,b$ ed $a\,$X.

Disponiamo la rotella R ad una distanza $r = m$ dall'asse del disco D, e, simultaneamente, la dentiera $d''d''$ nella posizione in cui la divisione 1 trovasi in esatta corrispondenza coll'asse $b\,b$ nella projezione orizzontale dell'apparecchio. Facciamo poscia ruotare il disco D nel verso degli x positivi indicato sul raggio $a\,$X. La variabile indipendente x, come si è già avvertito, è rappresentata dall'arco mn, ed il movimento che riceve la dentiera finale $d''\,d''$ sarà una certa funzione di x, che rappresentiamo con F (x).

Si tratta di determinare F (x). Ricordiamo perciò che in un generatore diretto lo spostamento longitudinale della rotella rappresenta la derivata del moto rotatorio preso dalla rotella stessa, dunque:

$$d\,.\,\mathrm{F}\,(x) = r\,.\,dx.$$

Ma r nel nostro caso è sempre uguale ad $m\,.\,\mathrm{F}\,(x)$, poichè la ruota P ha il raggio m, per conseguenza:

$$d\,.\,\mathrm{F}\,(x) = m\,.\,\mathrm{F}\,(x)\,.\,dx.$$

Supposto $m = 1$, si ha:

$$d\,.\,\mathrm{F}\,(x) = \mathrm{F}\,(x).\,dx.$$

La quale dice che la derivata di F (x) è uguale alla funzione stessa: si ha quindi F $(x) = e^x$, perchè, come si è notato precedentemente:

$$d\,.\,e^x = e^x\,.\,dx.$$

Il meccanismo descritto, nell'ipotesi di $m = 1$, genera così il movimento $y = e^x$ allorquando la ruota motrice M sviluppa la variabile indipendente x: la velocità di questo movimento è sempre eguale ad e^x.

Quando $x = 0$, la dentiera $d''\,d''$ fornisce il valore di e, che, come sappiamo, rappresenta la base dei logaritmi neperiani: $e = 2,718281$ .....

Quando $x = 0$, la dentiera segna $y = 1$, come si è fatto per convenzione, e la rotella R si trova sul cerchio di raggio 1.

Nel caso generale in cui il raggio della ruota P è m, per F $(x) = 1$, il che corrisponde ad $x = 0$, si ha:

$$\frac{d\,.\,\mathrm{F}\,(x)}{\mathrm{F}\,(x)} = m = r.$$

Quando $x = 1$, F (x) ha un certo valore a che è la base del sistema esponenziale corrispondente all'espressione $d\,.\,\mathrm{F}\,(x) = m\,.\,\mathrm{F}\,(x)\,.\,dx$; cioè si ha:

$$d.\,a^x = m\,.\,a^x\,.\,dx\,,$$

ove, come dimostra il calcolo, si deve porre $m = \log.\, a$. L'apparecchio allora genera il movimento $y = a^x$.

In generale adunque, data un'equazione esponenziale a^x, *essa si genera automaticamente col mezzo dell'apparecchio descritto, dando alla ruota* P *un raggio log. nat.* a, *e disponendo la rotella* R *in una posizione tale che per* $x = 0$ *od* $y = 1$, *la distanza* r *dall'asse del disco sia uguale ad* m.

Se il movimento da generarsi fosse $y = \mathrm{A}a^x$, basterebbe moltiplicare per A o il raggio della ruota P o quello della ruota finale C.

Quando si comanda il movimento del meccanismo mediante l'ultima dentiera $d''\,d''$, cioè si cambia la variabile indipendente, la ruota M genera evidentemente i logaritmi.

Nell'automatica le funzioni esponenziali e^x, a^x, possono essere applicate come nel calcolo logaritmico.

Così, quando si tratti di una funzione y rappresentata dal prodotto $f\,(x).\,\varphi\,(x).\,\psi\,(x)$ di tre funzioni, si prendono quattro generatori esponenziali, e si imprimono alle ruote C finali dei tre primi i movimenti $f\,(x)$, $\varphi\,(x)$, $\psi\,(x)$: le ruote M di questi generatori forniranno i logaritmi delle tre funzioni. Con due treni epicicloidali si sommano questi tre logaritmi, e la somma

$$\log.\, y = \log.\, f\,(x) + \log.\, \varphi\,(x) + \log.\, \psi\,(x),$$

ottenuta dalla ruota maggiore dell'ultimo treno, si trasmette alla ruota M del quarto generatore. La ruota finale C di questo fornirà allora y.

Allo stesso modo si procederebbe per un numero qualunque di fattori.

I medesimi generatori esponenziali, opportunamente combinati, permettono la generazione di $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, osservando che:

$$\log. y = \log. f(x) - \log. \varphi(x);$$

e di $y = f(x)^n$, ove n è intiero, frazionario, positivo o negativo, poichè $\log y = n \log. f(x)$.

L'applicazione dei generatori esponenziali può riescire utile in molti altri casi.

Si tratti, ad es., di ottenere il movimento:

$$y = \int a^x \, dx;$$

osserviamo che:

$$\int a^x \, dz = \frac{1}{\log. a} a^x;$$

invece di un apparecchio integratore, si può adunque applicare il meccanismo esponenziale capace di generare a^x, e poscia moltiplicare il movimento ottenuto per $\frac{1}{\log. a}$, mercè una ruota intermedia di raggio conveniente.

Se si tratta di generare $y = x^z$, si ha $\log. y = z \,.\, \log. x$, e, per conseguenza:

$$d \,.\, \log. y = z \,.\, d \log. x + \log. x \,.\, d z.$$

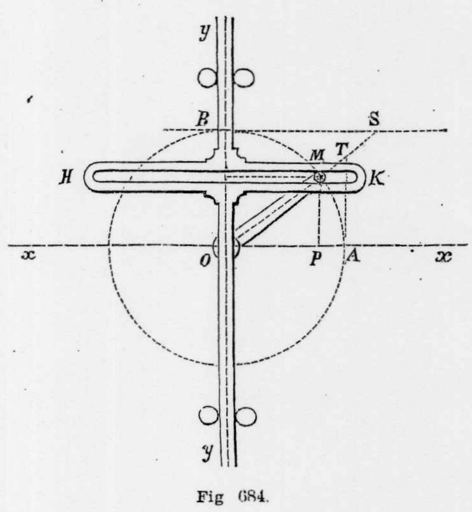


Fig 684.

Generazione dei movimenti rappresentati da funzioni trigonometriche. — Segniamo un cerchio di raggio 1 (fig. 684), due assi ortogonali $x x$, $y y$ che s'incontrino nel centro O di questo cerchio, e consideriamo un angolo $M o x = \alpha$. Le rette MP, AT, OT rappresentano rispettivamente il seno, la tangente, la secante di α, e le rette OP, BS, OS il coseno, la cotangente, e la cosecante dello stesso arco.

Immaginiamo poscia una manovella OM, girevole attorno ad O, e la cui estremità M, munita di un piccolo cilindro, deve rimanere entro alla feritoia HK, normale all'asse $y y$, e congiunta invariabilmente ad una stanghetta rettilinea obbligata a muoversi secondo $y y$. Questa stanghetta, quando la manovella OM ruota di moto equabile, è dotata di moto *armonico*. Se adunque l'origine del suo movimento è il punto O, essa genera sen. α; cambiando convenientemente l'origine, essa genera invece cos. α, sen. verso α, cos. verso α.

La generazione automatica delle altre linee trigonometriche si può ottenere collo stesso cerchio trigonometrico. Immaginiamo che la retta AT rappresenti una scanalatura rettilinea, entro la quale deve muoversi uno scorrevole portato dalla manovella OM prolungata, e mobile alla sua volta lungo la manovella stessa. Lo scorrevole, considerato come mobile sulla scanalatura AT, ha il movimento rappresentato da tang. α, e, considerato come mobile sulla manovella OM, ha il movimento sec. α. Disponendo la scanalatura secondo la retta BS, si genera cot. α e cosec. α (1).

Ottenuta così la generazione del movimento rappresentato da una linea trigonometrica, non presenta alcuna difficoltà, teoricamente parlando, la generazione di una funzione trigonometrica qualsiasi, applicando i meccanismi addizionatori, integratori, ecc. precedentemente descritti. Se infine una funzione da generarsi contiene una o più funzioni trigonometriche, si ricavano queste funzioni dai corrispondenti apparecchi trigonometrici, e si introducono nelle operazioni automatiche, precisamente come si fa per le altre funzioni.

Osservazioni intorno alla costruzione degli apparecchi automatici. — Da quanto si è veduto, risulta manifesta la possibilità teorica della risoluzione automatica di una equazione a due variabili, col mezzo di sistemi cinematici che permettono a ciascun organo un movimento di rotazione indefinito, proprietà essenzialissima, senza la quale una macchina di simile natura riescirebbe perfettamente inutile. Tuttavia è da notarsi che la continuità indefinita dei movimenti non si ottiene che per le rotazioni, poichè lo spostamento longitudinale della rotella non può superare in lunghezza il raggio del disco: tale spostamento, però, può essere reso abbastanza grande rispetto al raggio della rotella, da riescire sufficiente nella maggior parte dei casi.

La più grave difficoltà che s'incontra nell'applicazione pratica degli apparecchi descritti, consiste nello scorrimento tangenziale delle rotelle. Malgrado tutte le precauzioni prese dai migliori costruttori, tale scorrimento non potè finora essere evitato in modo assoluto, poichè non essendo possibile, in generale, l'impiego dei meccanismi dentati, il disco e la rotella devono trasmettersi il movimento per sola aderenza. Per risolvere questa difficoltà, sarà quindi necessaria la ricerca di mezzi speciali atti ad accrescere tale aderenza: lo Stamm suggerisce a tale uopo i mezzi magneto-elettrici proposti dal Nicklès per aumentare l'aderenza fra le ruote delle locomotive e le rotaje.

Si presentano tuttavia alcuni casi in cui è possibile di sostituire la rotella con una ruota dentata ed il disco con una conveniente corona dentata. Quando, ad es., l'apparecchio è speciale per la generazione automatica di una determinata equazione applicabile in molti casi, come succede per le formole di Mac-Laurin, di Bernouilli, di Taylor, ecc., le rotelle delle corrispondenti genealogie si

(1) Le quattro ultime linee trigonometriche possono diventare infinitamente grandi per certi valori particolari di α: egli è chiaro che l'applicazione pratica del cerchio trigonometrico descritto non è possibile allorquando α è prossimo a questi valori. Ecco il perchè il cerchio trigonometrico non serve comunemente che per la generazione di sen. α e di cos. α.

spostano sui proprii dischi seguendo costantemente le stesse curve: secondo queste curve, facili a determinarsi in ogni caso, si potranno adunque disporre i denti dei dischi, in modo che sia soddisfatta la condizione necessaria della costanza del passo.

Equazioni automatiche. — Fermiamoci ancora un istante sulle equazioni non esplicite di cui si sono rappresentati automaticamente i due membri.

Qualsiasi equazione a due variabili può essere tradotta automaticamente, col mezzo dei meccanismi che abbiamo descritti per la generazione dei movimenti rappresentati dalle funzioni fondamentali di cui si compone necessariamente un'equazione. Però in questa traduzione automatica non è necessario di rendere esplicita la funzione proposta: allora l'apparecchio rappresenta completamente l'equazione di cui si tratta, e prende il nome di *equazione automatica*.

Data una equazione implicita a due variabili, noi possiamo sempre considerare una variabile come indipendente e l'altra come dipendente, il che equivale, nell'equazione automatica corrispondente, a considerare una variabile come motrice e l'altra come generatrice. Tuttavia un'equazione automatica deve essere considerata sotto un punto di vista assai più generale. Noi faremo muovere bensì il sistema cinematico che corrisponde ad una delle variabili, ma, secondo la natura dell'equazione, sarà talvolta necessario di arrestarci al termine di un certo spazio percorso, allorquando l'apparecchio rifiuta di funzionare per aver raggiunto valori incompatibili gli uni cogli altri, ed indica che è ***al limite in cui finisce il reale e comincia l'immaginario;*** allora noi tenteremo di produrre il moto retrogrado, di cambiare il segno di certe derivate parziali valendoci di altre dentiere, di comandare il movimento coll'altra variabile in un senso od in senso contrario, od anche, ove sia del caso, di comandare le due variabili ad un tempo, benchè esse dipendano l'una dall'altra.

L'apparecchio insomma non deve più essere considerato, nel caso generale, come un generatore comandato da un motore che sviluppa una variabile con moto uniforme, ma bensì siccome la rappresentazione automatica delle condizioni algebriche che legano le due variabili simultanee.

Se l'equazione che si vuole tradurre automaticamente contiene tre variabili, la si rappresenta come le altre, avendo riguardo di riunire, per ciascuna variabile, con una speciale trasmissione, tutte le parti del meccanismo che devono ricevere il movimento da questa variabile; si ottengono così tre sistemi genealogici. Se non si comanda che una delle variabili, le altre due sono indeterminate nei limiti dell'equazione, o, se si vuole, sulla superficie che ne rappresenta il luogo geometrico: questo caso si presenta raramente nelle applicazioni. Se si comandano ad un tempo due delle tre variabili, o se si congiungono mercè *equazioni automatiche di condizione*, la terza variabile è evidentemente determinata. Così per un numero qualunque di variabili.

Ecco la regola generale da applicarsi per procedere alla rappresentazione automatica di una data equazione.

Data un'equazione da rappresentarsi automaticamente, si rappresentano anzitutto i varii termini che contengono le variabili, mercè combinazioni di genealogie, addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, ecc., come si è veduto parlando delle funzioni automatiche semplici; si sommano in ciascun membro i termini costanti e variabili col mezzo di apparecchi epicicloidali; poscia si rendono solidali le ruote finali del primo e del secondo membro. Se l'equazione è della forma $(X, Y, \ldots..) = 0$, *la ruota finale del primo membro deve rimanere immobile. Si congiungono infine, per ciascuna variabile, tutte le parti che devono ricevere il movimento da questa variabile, col mezzo di una trasmissione comune.*

Se si tratta di risolvere due o più equazioni a più incognite, si rappresenta automaticamente ciascuna equazione, e poscia si rendono solidali le stesse variabili delle diverse equazioni. Se riesce possibile di rendere solidali tutte le variabili, e se il sistema diventa allora immobile, le equazioni date sono compatibili e risolte, perchè le loro variabili soddisfano simultaneamente alle diverse equazioni. Ma se il sistema non può essere ridotto all'immobilità, le incognite sono ancora indeterminate, entro certi limiti che l'apparecchio permette di riconoscere. Se infine le variabili non possono essere rese completamente solidali, le equazioni date sono incompatibili.

PARTE TERZA

ARITMOGRAFI

Gli *aritmografi*, cioè gli apparecchi da calcolare che hanno per base il calcolo grafico, sono numerosissimi. Benchè per loro natura essi non diano mai l'esattezza, tuttavia l'approssimazione che permettono di ottenere è sufficiente nel maggior numero dei casi della pratica. Le loro esigue proporzioni, la facilità dell'uso, la rapidità delle operazioni, ed il loro poco costo, ne fanno apparecchi di sommo vantaggio in quelle arti, industrie o scienze, nelle quali si devono spesso eseguire con rapidità e con approssimazione sufficiente calcoli anche complicati; molti di questi apparecchi sono perciò assai diffusi, ed alcuni anzi di uso affatto generale.

Il più antico aritmografo che si conosca, e ad un tempo il più semplice ed il più ingegnoso, è il *compasso di proporzione*, dovuto ad un grande ingegno italiano, Galileo Galilei. Questo ingegnoso strumento geometrico, inventato verso la fine del secolo XVI, si diffuse rapidamente in tutto il mondo civile, e, fino a pochi anni fa, era nelle mani di quanti si occupavano di scienze positive: esso sarà il nostro punto di partenza. Parleremo poscia di *alcuni altri apparecchi a divisione non logaritmica*, quindi di quelli, oggidì diffusissimi, *a divisione logaritmica*, ed infine dei *planimetri*. Anche questi ultimi ricordano una gloria italiana, poichè il primo planimetro fu inventato nel 1824 dal professore Tito Gonnella di Firenze.

COMPASSO DI PROPORZIONE ED ALTRI APPARECCHI A DIVISIONE NON LOGARITMICA.

Compasso di proporzione di Galileo Galilei.

Il *compasso geometrico e militare*, così chiamato dal sommo nostro Galileo Galilei, che ne fu l'inventore verso l'anno 1597, è conosciuto ordinariamente col nome di *compasso di proporzione*. L'uso di questo strumento, utilissimo in ogni sorta di operazioni di geometria e di aritmetica, era spiegato dal Galileo, fin dal 1597, a voce e per iscritto ai numerosi allievi che da ogni parte d'Europa accorrevano a Padova alle sue lezioni. Il compasso di proporzione si diffuse così assai rapidamente in tutta Europa; ma non fu che nel luglio del 1606 che il Galilei, presentendo che altri si apparecchiava per appropriarsene l'invenzione, diede alle stampe in Padova il suo libro *Le operazioni del compasso geometrico e militare di Galileo Galilei* (Padova, 10 luglio 1606), dedicato al Serenissimo Don Cosimo, allora Principe di Toscana e suo discepolo (1).

Tale provvedimento non bastò, poichè nel marzo 1607 un certo Baldassarre Capra, milanese, cercò di far sua l'invenzione del Galilei, e stampò nella stessa Padova, traducendo in latino il lavoro del grande matematico, il libro *Usus et fabrica circini, cujusdam proportionis, opera et studio Balthassaris Capræ nobilis mediolanensis explicata.* Questo sfacciato tentativo di usurpazione venne combattuto vigorosamente dal Galilei, il quale ottenne di poter trattare pubblicamente la causa contro il suo avversario. Il Capra fu dichiarato, con sentenza del 4 maggio 1607 dei riformatori dello Studio di Padova, sfacciato usurpatore dell' invenzione del suo maestro, che egli nel suo libro e nella disputa pubblicamente sostenuta non aveva saputo spiegare, nè concepire. I particolari di questa clamorosa disputa possono leggersi, con tutti i più minuti particolari, nella *Difesa* che ne fece il medesimo Galilei. Il Viviani (2), parlando delle varie copie che s'erano sparse di parecchi trattati del suo maestro per l'Italia, Germania, Francia, Inghilterra e altrove, senza il suo nome, poichè era tanto liberale donatore quanto fecondo compositore, pare che volesse alludere a questo fatto del Capra, dicendo: « Ben è vero che questa sua natural liberalità in comunicare i suoi scritti, le proprie invenzioni e i suoi nuovi pensieri indifferentemente a ciascuno, gli fu spesso contraccambiata con altrettanta ingratitudine e sfacciataggine, non essendo mancati, o chi con disprezzo tentasse avviiirli, o chi se ne facesse onore come di parti de' proprii ingegni ».

Altri ancora si valse dell'invenzione del Galilei, e coll'aggiunta o la modificazione di alcune scale, cercò di appropriarsene l'invenzione, e tra questi l' inglese Edmondo Gunter, professore di Astronomia al collegio di Gresham, che applicò sul compasso di proporzione le principali linee trigonometriche, e spacciossi, nel 1606, per inventore del relativo strumento, cui diede il nome latino di *sector* (3).

Descrizione ed uso del compasso di proporzione. — Il compasso di proporzione (fig. 685) è formato da due laminette, ordinariamente metalliche, della stessa lunghezza ed unite a cerniera. Queste due laminette devono potersi aprire senza grande difficoltà, ma neppure con troppa facilità: si costruirono pure compassi con vite di chiusura alla cerniera o nocella, mediante la quale si potevano fermare le due laminette all'apertura voluta. Sopra le due faccie delle laminette trovansi parecchie scale rettilinee, convergenti tutte all'asse di rotazione della nocella; le divisioni di queste scale sono formate da piccole incavature o puntini poco profondi, nei quali, aperto lo strumento, si introducono le due punte di un compasso ordinario.

Sul compasso di proporzione quale fu ideato da Galileo, e di cui la figura rappresenta la faccia anteriore, le scale sono 7; la loro origine comune è sull'asse della nocella.

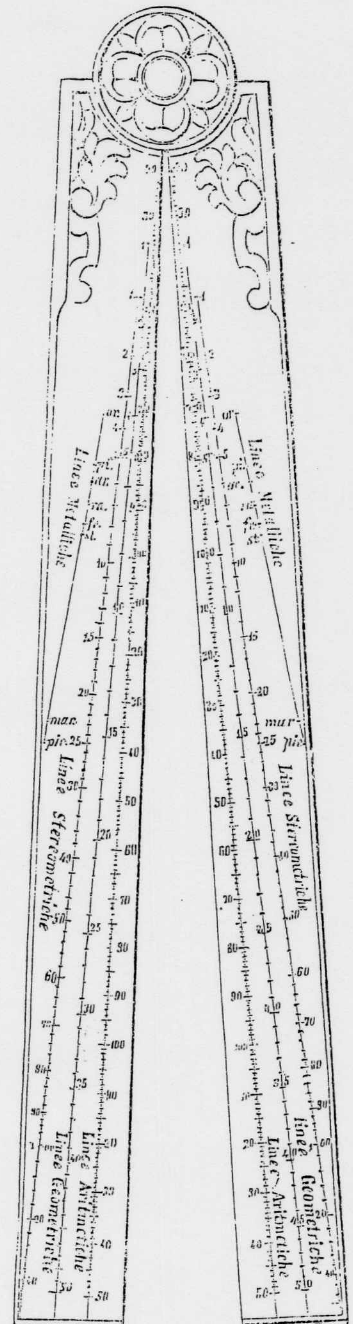


Fig. 685.

Le scale della faccia anteriore sono denominate:

Linee aritmetiche o delle parti uguali;

Linee geometriche o dei piani;

Linee stereometriche o dei solidi;

Linee metalliche.

(1) Quest'opera fu ristampata più volte in Padova, e, nel 1612, tradotta in latino a Strasburgo dal tedesco Mattia Bernegger. Il trattato francese *De l'usage du compas de proportion expliqué et démontré par* M. J. Ozanam, *professeur en mathématique* (Parigi 1688), può ritenersi come una traduzione di quello di Galilei. Intorno al compasso di proporzione si fecero molte altre pubblicazioni, che sono citate nella nota bibliografica di questo articolo.

(2) Viviani, *Vita di Galileo Galilei.*

(3) Benedetto Plebani, *Il Regolo calcolatorio e l'Aritmetica logaritmica piacevolmente illustrati e ridotti ad intelligenza ed uso comune* (Torino 1868). — Notisi che l'idea di applicare le linee trigonometriche sul compasso di Galilei, pare che non sia nemmeno dovuta al Gunter, poichè Muzio Oddi da Urbino, nella sua opera *Fabrica et uso del compasso polimetro* (Milano 1633), racconta che Guidobaldi del Monte, insigne matematico ed intrinseco del Galilei, aveva applicato sopra uno di tali compassi le linee dei seni: e ciò parecchi anni prima della pubblicazione del *sector*. Al Gunter tuttavia rimane il merito grandissimo, oggidì indubbiamente riconosciuto, di avere applicato pel primo le scale a divisione logaritmica.

Quelle della faccia posteriore:

Linee poligrafiche o dei poligoni;

Linee tetragoniche o dei piani regolari;

Linee aggiunte o quadratrici dei segmenti.

L'uso del compasso di proporzione è fondato sul noto teorema di geometria, il quale stabilisce che *nei triangoli simili i lati omologhi sono proporzionali.*

Linee aritmetiche. — Le linee aritmetiche, dette anche *linee delle parti uguali*, sono divise in 250 parti uguali. Sulle varie divisioni principali di queste scale trovansi i numeri 10, 20, 30, 40, ... ; in alcuni compassi di minore lunghezza la divisione non si estende che fino al 200; in altri maggiori essa va fino al 500.

Aprendo lo strumento ad un angolo qualunque, è chiaro che se noi immaginiamo condotte le rette trasversali che uniscono le divisioni corrispondenti a numeri uguali, ne risultano tanti triangoli isosceli simili; perciò il rapporto che sussiste fra il lato e la base dell'uno è uguale al rapporto che sussiste fra il lato e la base di uno qualunque degli altri. Tale proprietà si applica alla risoluzione di svariatissime questioni di aritmetica e di geometria, fra cui citiamo: la ricerca della terza o della quarta proporzionale fra due o tre numeri o lunghezze date, e quindi la risoluzione di tutti quei problemi in cui si applicano le proporzioni, come i problemi sulla regola del tre semplice o composta, sulle regole di società, di sconto e d'interesse; il prodotto od il quoziente di numeri dati; la divisione di un segmento rettilineo dato in un numero qualsiasi di parti uguali; la divisione di una retta in parti proporzionali a due numeri dati; la costruzione di un disegno in data scala, o la riduzione di un disegno da una scala in un'altra; la ricerca della lunghezza di una circonferenza di circolo di noto diametro, ricordando che il rapporto fra la lunghezza della circonferenza ed il suo diametro si può ritenere eguale a quello dei numeri 157 e 50; ecc.

Si tratti ad esempio di risolvere la seguente proporzione:

$$x : m = n : q.$$

Uno dei procedimenti con cui si potrà ottenere x è il seguente: preso con un compasso ordinario uno dei medii, m od n, sull'una delle linee aritmetiche, si apre il compasso di proporzione finchè tale distanza sia disposta trasversalmente sull'estremo cognito q; poscia, senza muovere lo strumento, si prende la distanza trasversale dell'altro medio n od m. Questa, misurata rettamente, dà il valore di x. Nell'applicazione di questo o di altri procedimenti consimili, può talvolta riescire conveniente di prendere la metà, o il terzo, o il quarto, ... od anche il doppio, il triplo, il quadruplo, ... di tutti o di qualcuno dei numeri dati: la via da seguirsi in questi casi non cambia, purchè anche il valore di x si riduca convenientemente. Giova avvertire che in tutte le operazioni che si possono eseguire colle linee aritmetiche non si leggono sulle divisioni che numeri di tre cifre, la quarta deve essere stimata a vista.

Si tratti ancora di dividere un segmento rettilineo dato in un numero qualunque di parti uguali, ad es. in 11. Preso con un compasso ordinario il segmento dato, si apre lo strumento finchè tale lunghezza sia applicata trasversalmente sui due punti corrispondenti ad uno stesso multiplo di 11, ad es. sui due punti 220 delle linee aritmetiche; la distanza trasversale fra 20 e 20 sarà la undicesima parte del segmento dato. Notisi inoltre che la distanza fra 40 e 40 rappresenta i $^2/_{11}$, la distanza fra 60 e 60 i $^3/_{11}$, ... la distanza fra 200 e 200 i $^{10}/_{11}$ del segmento proposto, e perciò la parte cercata si potrà pure ottenere facendo la differenza fra il segmento dato e la lunghezza che ne esprime i $^{10}/_{11}$: tale procedimento è specialmente da applicarsi quando si deve dividere un segmento dato in molte parti uguali. Se il segmento proposto fosse piccolissimo, ovvero eccedesse l'apertura dello strumento, si moltiplicherà o si dividerà convenientemente in modo da ridurre la questione al caso di cui abbiamo parlato.

Linee geometriche. — Le linee geometriche, o *dei piani*, portano 50 divisioni, distanti dall'origine della scala di quantità proporzionali alle radici quadrate 1.00, 1.41, 1.73, 2.00, ... 7.07, dei numeri 1, 2, 3, 4, ... 50 segnati sulle divisioni stesse; in alcuni compassi tali scale si estendono fino al 64 ed anche fino al 100.

Aperto il compasso in modo che la distanza trasversale fra due divisioni uguali delle linee geometriche sia uguale alla radice quadrata del numero segnato su queste divisioni, la distanza trasversale fra due altre divisioni uguali qualunque dà la radice quadrata del numero segnato su queste divisioni stesse.

La radice quadrata di un numero si otterrà adunque in modo semplicissimo. Presa con un compasso ordinario sulle linee aritmetiche la distanza fra l'origine e la divisione 40 ad es., questa distanza rappresenta $10\sqrt{16}$; si apre il compasso di proporzione finchè tale distanza sia compresa trasversalmente fra le divisioni 16 e 16 delle linee geometriche; prendendo poscia col compasso ordinario la distanza compresa fra due altre divisioni uguali delle linee stesse, ad es. fra le divisioni 50 e 50, tale distanza misurata sulle linee aritmetiche ci dà immediatamente 70.7, che esprime $10\sqrt{50}$; cosicchè $\sqrt{50} = 7.07$.

Le linee geometriche permettono eziandio la risoluzione dei seguenti problemi di geometria: dato un poligono od un circolo, trovarne un altro simile, la cui superficie stia a quella del primo in un dato rapporto; dati più poligoni simili o più circoli, trovare il rapporto delle loro superficie; dati più poligoni simili o più circoli, costruirne un altro la cui superficie sia uguale alla somma delle superficie dei poligoni o dei circoli dati; dividere un triangolo dato in un numero qualunque di parti equivalenti con rette parallele ad un lato; e simili.

Linee stereometriche. -- Le linee stereometriche, o *dei solidi*, portano 148 divisioni, le cui distanze dall'origine sono proporzionali alle radici cubiche 1.00, 1.26, 1.44, 1.59, ... 5.29 dei numeri 1, 2, 3, 4, ... 148 segnati sopra queste divisioni; in alcuni compassi tali linee si estendono fino al 216, in altri fino al 64.

L'estrazione della radice cubica colle linee stereometriche si fa in modo simile a quello testè indicato per ottenere la radice quadrata colle linee geometriche. Si prende cioè con un compasso ordinario sulle linee aritmetiche la distanza fra l'origine e la divisione 40 ad es., e si apre il compasso di proporzione finchè tale distanza sia compresa trasversalmente fra le divisioni 64 e 64 delle linee stereometriche: allora la distanza fra due divisioni eguali delle linee stesse, misurata sulle aritmetiche e divisa per 10, esprime la radice cubica del numero segnato sulle divisioni considerate.

Colle linee stereometriche possono essere risolti molti problemi di Geometria, fra cui: dato il lato di un poliedro qualsiasi, od il raggio di una sfera, determinare il lato di un poliedro simile od il raggio di una sfera, il cui volume sia in un determinato rapporto con quello del solido proposto; dati due solidi simili, trovare il rapporto dei loro volumi; dati più solidi simili trovarne un altro simile il cui volume sia eguale alla somma di quelli dei primi; dato un parallelepipedo trovare il lato di un cubo equivalente; ecc.

Linee metalliche. — Nelle linee metalliche le distanze dall'origine delle scale alle varie divisioni sono proporzionali ai diametri delle sfere di sostanze diverse, che hanno lo stesso peso. Le divisioni corrispondono alle seguenti sostanze: oro, piombo, argento, rame, ferro, stagno, marmo, pietra; le loro distanze dall'origine sono rispettivamente: 100, 116, 119, 129, 135, 137, 186, 200.

Aperto il compasso di proporzione in modo qualunque, è evidente che le distanze fra due divisioni uguali di queste linee rappresentano i diametri delle sfere od i lati dei cubi che hanno il medesimo peso. Col mezzo di queste linee riesce quindi facile la risoluzione del seguente problema: dato un solido di una certa sostanza, determinare le dimensioni di un solido simile di altra sostanza, ma del medesimo peso.

Linee poligrafiche. — Le linee poligrafiche o *dei poligoni* portano 20 divisioni, le cui distanze dall'origine sono proporzionali ai lati dei poligoni regolari di 3, 4,... 20 lati inscritti in una stessa circonferenza di circolo. Dato il raggio di una circonferenza, ed aperto il compasso di proporzione in modo che la distanza fra le divisioni 6, 6 delle linee poligrafiche sia uguale a questo raggio, la distanza fra due altre divisioni uguali delle stesse linee, per es. la distanza 13, 13, rappresenta il lato del poligono regolare di 13 lati inscritto nella circonferenza data.

Linee tetragoniche. — Le linee tetragoniche, o *dei piani regolari*, hanno 20 divisioni distinte coi numeri 3, 4, ... 20, le cui distanze dall'asse della nocella sono proporzionali ai lati dei poligoni regolari di 3, 4, ... 20 lati che sono equivalenti. Fra le divisioni 6 e 7 vi ha una divisione intermedia distinta dalle altre con un piccolo cerchio e con un R: questa divisione corrisponde al raggio del circolo equivalente a ciascuno degli altri poligoni. La determinazione dell'area di un dato cerchio si fa a questo modo: preso con un compasso ordinario il raggio del cerchio, si apre il compasso di proporzione in modo che la distanza fra le divisioni R, R sia eguale a questo raggio: se si prende allora la distanza fra le divisioni 4, 4, questa rappresenta il lato del quadrato equivalente al cerchio proposto. Se si prendesse invece la distanza fra i punti 3, 3 o fra i punti 5, 5, ecc. si avrebbe il lato del triangolo, del pentagono, ecc., equivalenti al circolo dato. Queste linee permettono eziandio di trovare un poligono regolare eguale alla somma di più poligoni regolari dati, e di trasformare un poligono irregolare qualsiasi in un altro, triangolo, quadrato, ecc., equivalente.

Linee aggiunte. — Le linee aggiunte, o *quadratrici dei segmenti*, servono alla determinazione delle aree del segmento e del settore circolare. Nota la corda e la saetta di un segmento, esse permettono di trasformare questo segmento in un triangolo od in un quadrato equivalente.

Oltre le linee di cui abbiamo fatto cenno, le quali trovansi nel compasso di proporzione ideato dal Galileo, si aggiunsero dai varii costruttori alcune altre linee, fra cui citiamo principalmente: *le linee delle corde o dei gradi del cerchio*, le quali permettono, dato il raggio e l'ampiezza di un arco, di trovarne la corda, o reciprocamente, dato il raggio e la corda, di trovarne l'ampiezza; le *linee dei solidi regolari*, che servono alla trasformazione di una sfera o di un poliedro regolare in un cubo equivalente; ed anche le *linee dei seni* e le *linee delle tangenti*, introdotte, come già abbiamo detto, da Guidobaldi del Monte, e poscia dal Gunter.

Il compasso di proporzione è soventi munito di un *quadrante* metallico, mediante il quale il compasso può essere aperto ad angolo retto: sopra il quadrante si trovano talvolta varie divisioni, ma nel maggior numero dei casi esso non porta che la divisione in 90 gradi.

Squadra di proporzione di Antonio Maria Lorgna.

Il dotto veneziano Antonio Maria Lorgna propose nel 1768 un ingegnoso apparecchio, atto, come il compasso di Galilei, a risolvere parecchie questioni di matematica (1). Questo apparecchio, che il Lorgna chiama la *squadra di proporzione*, è rappresentato schematicamente dalla figura 686.

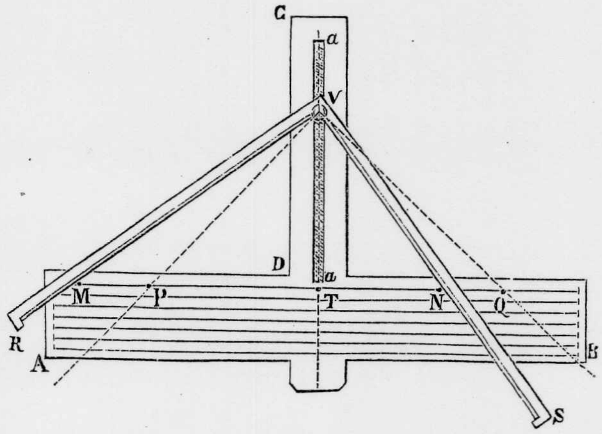


Fig. 686.

Esso consta di due parti principali, una fissa e l'altra mobile. La parte fissa è formata di due lastre piane metalliche AB, CD, la seconda delle quali è congiunta normalmente ed a metà lunghezza della prima; sull'asse della lastra CD trovasi una scanalatura rettilinea *a a* che ne percorre pressochè l'intiera lunghezza. La parte mobile, che costituisce la squadra propriamente detta, è formata da due piccole lastre metalliche VR, VS, congiunte invariabilmente fra di loro ad angolo retto. Il vertice V di questa squadra è scorrevole entro la scanalatura *aa*, e può essere fissato in un punto qualsiasi della scanalatura stessa, rimanendo però sempre libera la rotazione dei due bracci VR, VS attorno all'asse normale passante per il loro punto d'incontro V.

Sulla lastra maggiore AB della parte fissa sono incise parecchie scale rettilinee, parallele fra di loro, e con direzione esattamente normale all'asse della scanalatura *aa*. Tutte queste scale hanno l'origine sul prolungamento inferiore dell'asse stesso e si estendono dai due lati comprendendo pressochè l'intiera lunghezza della lastra maggiore; la loro divisione è fatta come nel compasso di proporzione. Esse si distinguono coi nomi di: *linee fondamentali* o delle parti uguali; *linee delle tangenti; linee delle corde; linee delle misure; linee dei seni; linee dei solidi; linee dei pesi.* Anche i lembi della scanalatura *a a* ed i due spigoli interni della squadra sono divisi in parti uguali, come le linee fondamentali.

Il principio geometrico su cui è fondato questo apparecchio è il seguente: *se due triangoli rettangoli hanno comune il vertice dell' angolo retto e l'altezza con-*

(1) *Fabbrica ed usi principali della squadra di proporzione di* Anton Maria Lorgna, *Capitano degli Ingegneri e Professore di Matematiche nel pubblico collegio militare di Verona* (In Verona, nella stamperia Moroni, 1768).

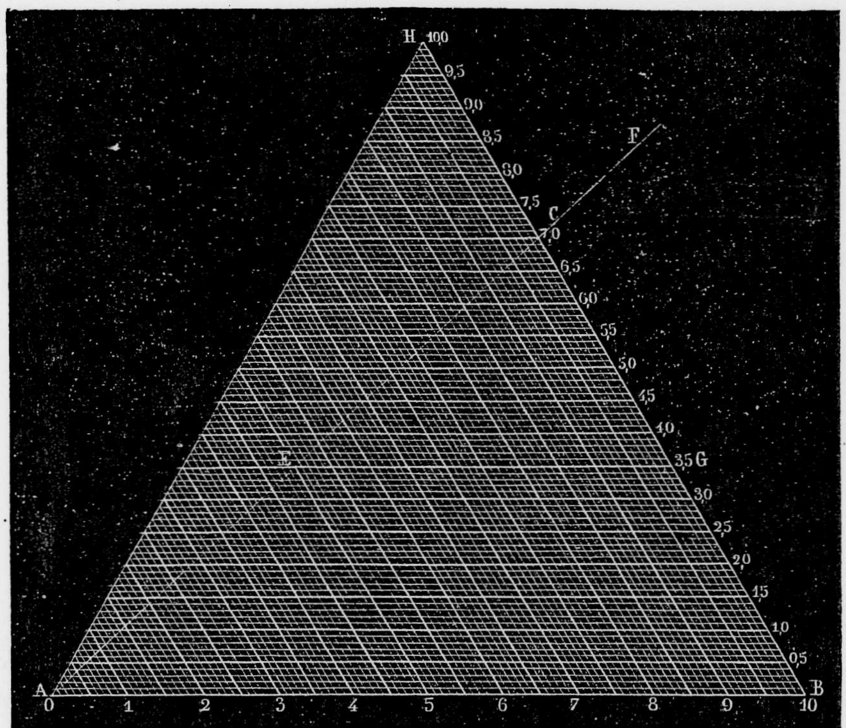


Fig. 687.

dotta sull'ipotenusa, il prodotto dei due segmenti che il piede di quest'altezza determina sulla base dell'uno è uguale al prodotto dei segmenti determinati sulla base dell'altro.

Consideriamo infatti i due triangoli rettangoli M V N, P V Q; la loro altezza comune V T è media proporzionale fra i due segmenti in cui essa divide ciascuna delle due basi, dunque come abbiamo enunciato:

$$MT \times TN = PT \times TQ.$$

Da questa eguaglianza si deduce immediatamente:

$$TQ : TN = MT : PT.$$

Si tratti, ad es., di risolvere la proporzione:

$$x : m = n : p.$$

Consideriamo le due divisioni M ed N delle linee fondamentali corrispondenti ai medii m ed n, e fissiamo il vertice V della squadra in modo che i suoi due lati cadano su queste due divisioni; facendo poscia ruotare il braccio V R finchè passi per la divisione P corrispondente all'estremo p, l'altro braccio V S passa sulla divisione Q, su cui si leggerà il valore di x.

Colle linee delle parti uguali si risolvono adunque tutti i problemi in cui entrano le proporzioni. Le altre linee servono alla ricerca delle radici quadrata e cubica ed alla risoluzione di numerosi problemi di Aritmetica, di Geometria, di Algebra e di Trigonometria.

Abbaco di Piccard.

Il signor Piccard, di Losanna, ha proposto recentemente un apparecchio semplicissimo, fondato eziandio sulle proprietà dei triangoli simili, col quale si può eseguire la moltiplicazione, la divisione, ed ottenere graficamente col compasso, senza alcun calcolo, l'area delle superficie poligonali piane, decomposte o trasformate in triangoli o rettangoli.

Consideriamo due triangoli simili A D E, A B C (figura 687); si ha: $AD : DE = AB : BC$,

ossia $AD \times BC = DE \times AB$.

Se $AB = 10$ $AD \times BC = 10 \times DE = 10 \times BG$.

Ecco come, fondandosi sopra questa semplice proprietà geometrica, il Piccard costruisce il suo abbaco. Segniamo un triangolo equilatero A B H, e dividiamone i lati in 100 parti uguali. Dai punti di divisione conduciamo due serie di rette parallele a due dei lati del triangolo: al lato inferiore A B, e ad uno degli altri due, per es. a quello di destra B H. Sulle 10 divisioni principali del lato inferiore A B segniamo i numeri 0, 1, 2, 3, ... 10; su quelle dell'altro lato B H i numeri 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, ... 10.0. Al vertice A di sinistra è fissato un filo A F finissimo, o lo spigolo di un regolo girevole attorno al punto A.

Moltiplicazione e divisione. — Per ottenere il prodotto di due fattori minori di 10, ad es. 5×7, si dispone la linea A F in modo che passi per la divisione del lato A H corrispondente ad uno dei fattori, per es. al 7. Si legge l'altro fattore 5 sul lato inferiore A B, si segue la parallela a B H fino all'incontro della retta A F in E, e si segue poscia la parallela E G al lato inferiore A B; in G si legge il numero 4.0, che, moltiplicato per 10, ci dà il prodotto cercato 40. Nella stessa posizione del filo A F si leggono pure tutti gli altri multipli semplici di 7.

Per fattori maggiori di 10 il prodotto si ottiene allo stesso modo, supponendo che il lato del triangolo A B H rappresenti 100, 1000, ... ; in questo caso però il prodotto ottenuto non sarà che approssimato, a meno che il triangolo sia eseguito in proporzioni molto più grandi, e la divisione dei suoi lati estesa a 1000, 10000 ..... parti uguali. Le cifre esatte che si possono ottenere con questo apparecchio sono adunque assai limitate.

Il procedimento per eseguire la divisione è inverso al precedente.

Calcolo delle aree dei poligoni. — Questo apparecchio riesce più utile nel calcolo delle aree delle superficie poligonali scomposte o trasformate in triangoli, nel qual caso conviene dividere il lato B H in sole 50 parti uguali, od almeno sostituire la numerazione di questo lato dal 0, 0.5,....., 10.0, colla numerazione 0,....., 5.0, saltando una divisione ad ogni numero. Allora, considerato il primo triangolo della figura proposta, se ne porta l'altezza in BC e la base in A D, o viceversa; BG esprime l'area. Allo stesso modo si fa per tutti gli altri triangoli, ed i varii segmenti BG ottenuti, portati l'uno di seguito all'altro sul lato B H, ci dànno un punto a cui si legge l'area totale cercata.

Trattandosi di uno o più rettangoli, quadrati, parallelogrammi, si opera in modo analogo; però in questi casi il lato B H deve portare la numerazione fino al 10.0 come in figura.

Tavola grafica di Pouchet.

Un'equazione a due variabili F $(x, y)=o$ può essere rappresentata graficamente da una linea riferita ad un determinato sistema di coordinate. Questa rappresentazione grafica, utilissima in molti casi, è applicata non solo quando la relazione fra le variabili è una legge algebrica conosciuta, ma eziandio quando si tratta di esprimere in modo chiaro ed evidente i risultati statistici desunti dall'osservazione di fatti economici o naturali. La traduzione grafica della legge algebrica od empirica che lega le due variabili, permette, in generale, di seguirne le variazioni assai più facilmente che non colla discussione dell'equazione o coll'esame dei documenti statistici e delle tavole numeriche.

Una rappresentazione simile si può fare quando la legge algebrica od empirica contiene tre quantità variabili; in questo caso però il luogo geometrico che esprime la legge di cui si tratta, riferito a tre assi coordinati, è una superficie. Si può tuttavia, col mezzo di una notazione semplice ed espressiva, sostituire la costruzione nello spazio con una costruzione contenuta in un piano.

Immaginiamo, infatti, che si tagli la superficie con una serie di piani equidistanti paralleli ad uno dei piani coordinati, e che se ne projettino le curve di intersezione, o le *curve di livello*, sopra di questo piano. Queste projezioni sono identiche alle curve dello spazio, e segnando su ciascuna di esse la *quota* che indica il valore della coordinata comune a tutti i suoi punti, si ottiene un *piano quotato* che rappresenta completamente la superficie e quindi l'equazione a tre variabili di cui si tratta. Questo procedimento è analogo a quello che si impiega nella Geometria pratica per rappresentare col mezzo di curve di eguale livello gli innalzamenti o gli abbassamenti del terreno.

Sia $F(x, y, z) = o$ l'equazione da tradursi graficamente. Attribuiamo a x i valori successivi $o, z_1, 2z_1, 3z_1, ...$, e rappresentiamo, riferite ad un medesimo sistema di due assi coordinati ortogonali, le curve che hanno rispettivamente per equazioni:

$$F(x, y, o) = o;$$
$$F(x, y, z_1) = o;$$
$$F(x, y, 2z_1) = o;$$
$$F(x, y, 3z_1) = o;$$
$$\cdots\cdots$$

Queste curve sono le projezioni ortogonali delle curve di livello della superficie $F(x, y, z)=o$, e sulle medesime si segneranno rispettivamente le quote o, z_1, $2z_1$, $3z_1$,.....

Tale procedimento può essere applicato per qualsiasi equazione a tre variabili.

Se l'equazione data è del primo grado in x ed in y, le linee di livello e le loro projezioni sono rette.

Se l'equazione è della forma:

$$z = ax + by + c,$$

il piano che essa determina è tagliato secondo linee di livello che sono rette parallele. Se, in questa equazione, si fa $a = b$, le rette parallele hanno per coefficiente angolare l'unità e fanno angoli uguali coi due assi delle x e delle y; questi angoli sono di 45° allorquando gli assi sono ortogonali.

L'equazione

$$z = \frac{x}{y},$$

o, più generalmente,

$$z - c = \frac{x - a}{y - b},$$

è rappresentata da un fascio di rette quotate passanti per il punto di coordinate a e b.

Allorquando l'equazione a tre variabili è di secondo grado, le curve di livello sono, in generale, delle coniche.

La tavola grafica di Pouchet, indicata schematicamente nella figura 688, è un'applicazione di questo procedimento. Essa rappresenta l'equazione:

$$z = xy,$$

e perciò può sostituire la tavola di moltiplicazione o di Pitagora.

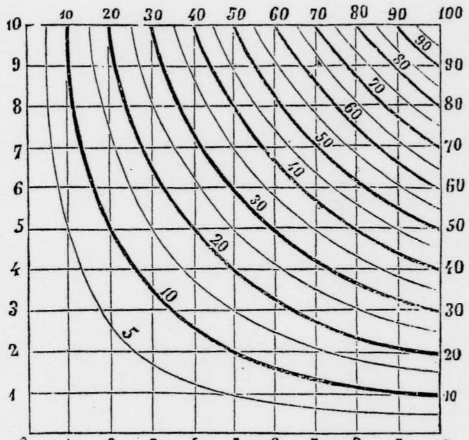


Fig. 688

Il luogo geometrico che ha per equazione $z = xy$ è un paraboloide iperbolico. Se diamo a z dei valori determinati successivi, si ottengono le curve di livello delle superficie, le quali sono iperbole equilatere omotetiche riferite ai loro assintoti. Per determinare il prodotto di due numeri, si cerca il punto del piano che ha per coordinate i valori lineari rappresentativi di questi numeri: questo punto è sopra un' iperbole la cui quota esprime il prodotto cercato (1).

(1) Alcune tavole grafiche, fondate sullo stesso principio, furono eziandio proposte dall'ingegnere V. Soldati per il calcolo delle espressioni $D = S \operatorname{sen}^2 \varphi$ e $t = S \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{2}$ che occorrono nella celerimensura (*Cenni intorno ad un saggio di celerimensura*, per l'ing. V. Soldati. *Atti della Società degli ingegneri e degli industriali di Torino*, 1871, pag. 41).

La tavola di Pouchet, e le altre tavole grafiche che si ottengono applicando lo stesso principio, richiedono delle costruzioni lunghe e precise, e presentano soventi qualche difficoltà nella lettura dei numeri in causa delle molte curve assai vicine di cui si compongono. La loro costruzione e la loro lettura si possono facilitare notevolmente applicando il metodo di trasformazione proposto da Lalanne sotto il nome di *anamorfosi geometrica* (1).

Consideriamo ancora la tavola di Pouchet. I due assi coordinati x ed y di questa tavola essendo divisi in parti uguali, le coordinate dei varii punti delle curve sono proporzionali ai loro valori numerici. Però tale proporzione non è necessaria, e si può immaginare che le divisioni equidistanti siano sostituite da divisioni le cui distanze dall'origine, pur mantenendo le stesse notazioni numeriche precedenti, segnano un'altra legge qualsiasi. Graduando adunque secondo questa nuova legge i due assi coordinati, le iperbole primitive si trasformano in altre curve quotate, le quali permetteranno come le prime di ottenere il prodotto di due numeri. La trasformazione sarà conveniente se le nuove curve sono più facili a costruirsi ed a leggersi delle primitive, e specialmente se riesce possibile, facendo variare con una legge conveniente i valori lineari delle coordinate della nuova figura, di sostituirle con linee rette.

Le iperbole della tavola grafica di Pouchet possono appunto essere trasformate in linee rette. Osserviamo, a tale uopo, che la somma delle coordinate di un punto qualsiasi preso sopra di una retta inclinata a 45° sui due assi coordinati è una quantità costante. Per conseguenza se noi, invece di portare su questi assi delle lunghezze proporzionali ai valori numerici delle coordinate, portiamo delle lunghezze proporzionali ai logaritmi di questi valori, è chiaro che le rette a 45° le quali uniscono i punti corrispondenti così ottenuti sostituiscono completamente le curve della tavola di Pouchet: il prodotto delle coordinate di qualsiasi punto preso sopra una di queste rette è costante ed uguale alla quota della retta che si considera. La tavola di Pouchet trasformata a questo modo diventa l'*abbaco di Lalanne*, di cui ci occuperemo più distesamente in seguito parlando degli apparecchi a divisione logaritmica.

La trasformazione accennata si può esprimere algebricamente a questo modo. Nell'equazione del paraboloide iperbolico

$$z = xy$$

facciamo: $x' = \log. x, \quad y' = \log. y;$

essa diventa allora:

$$\log. z = x' + y'.$$

Considerando x', y', z, come tre coordinate variabili, questa nuova equazione rappresenta un cilindro parallelo al piano xy, le cui linee di livello sono rette parallele, inclinate a 45° sugli assi.

Queste rette, che una prima trasformazione permise di sostituire alle iperbole della tavola di Pouchet, potrebbero, alla loro volta, essere sostituite da circonferenze concentriche. Ed invero, facendo nell'equazione precedente:

$$x' = x''^2, \quad y' = y''^2, \quad \log. z = z''^2,$$

si ottiene:

$$x''^2 + y''^2 = z''^2.$$

La graduazione degli assi coordinati deve essere fatta in questo caso secondo le radici quadrate dei logaritmi dei numeri.

Apparecchio di Lill per la risoluzione grafica delle equazioni.

All' Esposizione universale di Parigi del 1867 il capitano austriaco Lill espose un apparecchio semplicissimo (2), che permette di determinare approssimativamente le radici di un'equazione razionale intiera di grado qualunque:

$$A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \ldots\ldots + P x^2 + Q x + R = 0.$$

Ecco il principio su cui è fondato questo apparecchio. Descriviamo una linea poligonale ad angoli retti (fig. 689), di cui i lati successivi 01, 12, 23,..... 78, abbiamo lunghezze rispettivamente proporzionali ai coefficienti A, B, C,..... P, Q, R dell'equazione proposta. Portiamo un segmento qualsiasi $1 1_1$ sul secondo lato 12 di questa poligonale, e, tirata la retta $0 1_1$, descriviamo una seconda poligonale ad angoli retti $0 1_1\ 2_1\ 3_1, \ldots\ 7_1$, i cui vertici cadano sui lati della prima. Si può dimostrare che *se l'ultimo punto* 7_1 *di questa seconda poligonale viene a coincidere coll'ultimo punto* 8 *della prima, il segmento* $1 1_1$ *da cui si è partiti, misurato prendendo per unità di lunghezza il lato* 01, *rappresenta una delle radici reali dell'equazione proposta.* In figura è appunto segnata la poligonale $0 A_1\ A_2\ A_3 \ldots\ A_7$ che soddisfa a queste condizioni, cosicchè il segmento $1 A_1$ misurato come si è detto, esprime una delle radici che si cercano.

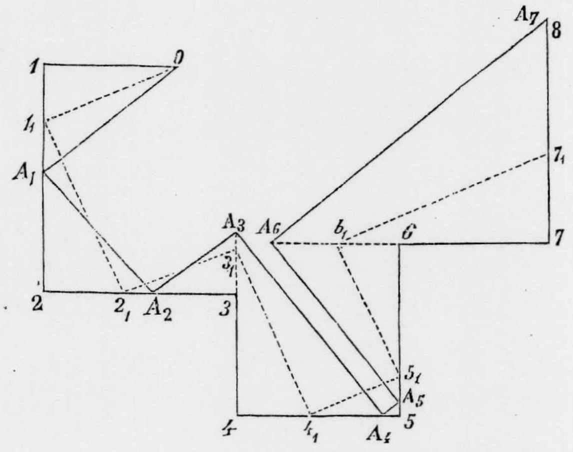


Fig. 689.

Consideriamo infatti la poligonale $0 1_1\ 2_1\ 3_1 \ldots\ 7_1$. I triangoli rettangoli simili $0 1 1_1$, $1_1 2 2_1$, $2_1 3 3_1$, ... dànno luogo alle seguenti eguaglianze:

$$\frac{01}{11_1} = \frac{1_1 2}{22_1} = \frac{2_1 3}{33_1} = \ldots\ldots = \frac{6_1 7}{77_1}.$$

Facendo $1 1_1 = X$, ed indicando rispettivamente con A, B, C,..... P, Q, R, i lati 01, 12, 23,...., della poligonale primitiva, le stesse eguaglianze si possono scrivere così:

$$\frac{A}{X} = \frac{B - X}{22_1} = \frac{C - 22_1}{33_1} = \ldots\ldots = \frac{Q - 66_1}{77_1}.$$

(1) Lalanne, *Mémoire sur les Tables graphiques et sur la Géometrie anamorphique*, ecc. (*Annales des Ponts et Chaussées*, 2e semestre, vol XI, 1846). — A Favaro, *Lezioni di statica grafica*, Padova 1877.

(2) *Rapport du Jury international sur l'Exposition universelle de 1867 à Paris*, vol. 2°, pag. 537. — Lill, *Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue* (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 1867 e 1868). — Favaro, op. cit

Da queste ricaviamo:

$$22_1 = B\frac{X}{A} - A\left(\frac{X}{A}\right)^2;$$

$$33_1 = C\frac{X}{A} - B\left(\frac{X}{A}\right)^2 + A\left(\frac{X}{A}\right)^3;$$

....

$$77_1 = Q\frac{X}{A} - P\left(\frac{X}{A}\right)^2 + \ldots\ldots - B\left(\frac{X}{A}\right)^{m-1} + A\left(\frac{X}{A}\right)^m;$$

e quindi

$$7_1 8 = R - Q\frac{X}{A} + P\left(\frac{X}{A}\right)^2 - \ldots\ldots + B\left(\frac{X}{A}\right)^{m-1} - A\left(\frac{X}{A}\right)^m,$$

od anche, ponendo $-\frac{X}{A} = x_1$:

$$7_1 8 = A x_1^m + B x_1^{m-1} + C x_1^{m-2} + \ldots P x_1^2 + Q x_1 + R.$$

Il segmento $7_1 8$ rappresenta adunque il valore che assume il polinomio dato, quando nel medesimo si sostituisce ad x il valore $-\frac{X}{A}$ o $-\frac{11_1}{A}$. Se succede quindi che $7_1 8 = 0$, cioè che la seconda poligonale termina nel punto 8 finale della prima, la quantità $-\frac{11_1}{A}$, cioè il segmento 11_1 misurato coll'unità di lunghezza $01 = A$, è una radice dell'equazione proposta. Perciò la risoluzione grafica della nostra equazione è ridotta a determinare sul lato 12 della poligonale primitiva il punto A_1 per cui si può costruire una seconda poligonale ad angoli retti, i cui vertici $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$, cadono sui lati 12, 23, 34, ... della prima, e che termina nel punto 8. Il numero delle radici reali dell'equazione di cui si tratta è uguale al numero dei punti A_1 presi sul lato 12 o sui suoi prolungamenti, che soddisfano a queste condizioni.

L'apparecchio ideato dal capitano Lill permette appunto di determinare questi punti A_1 colla massima rapidità. Esso si compone di un disco circolare di legno, su cui sono tracciati due sistemi ortogonali di rette parallele a distanza di un millimetro l'una dall'altra. Il contorno di questo disco è diviso in 360 gradi con graduazione da destra a sinistra. Esso può ruotare attorno al proprio asse, sopra di una piccola tavola fissa munita di nonio. Al disopra del disco è disposta una lastra circolare di vetro, smerigliata, ma abbastanza trasparente perchè si scorgano le due serie ortogonali di rette parallele tracciate sul medesimo.

Per risolvere un'equazione nota, si stabilisce anzitutto la coincidenza fra lo zero della graduazione portata dal disco mobile e lo zero del nonio fisso: il raggio OY, che segna la direzione di una delle due serie di rette parallele, passa allora per lo zero comune, ed il raggio OX, perpendicolare al primo, passa per il punto della graduazione che corrisponde a 270°. Con un lapis si segnano poscia sul vetro smerigliato i punti 0, 1, 2,..... 7, 8, della prima poligonale, al quale scopo serve molto convenientemente la lastra smerigliata sottostante, e quindi si traccia l'intiera poligonale 0 1 2 ..... 7 8. Si fa infine ruotare il disco mobile graduato, finchè si ottenga un secondo contorno poligonale ad angoli retti, i cui vertici cadano sulle rette 01, 12, 23, ..., e che incominci nel punto 0 e termini nel punto 8. Qualsiasi contorno che soddisfa a queste condizioni, determina, come si è veduto, una radice reale dell'equazione proposta. I tentativi necessarii per tale ricerca, e la lettura delle radici, sono resi facili e spediti mercè il quadrettamento segnato sul disco mobile.

La graduazione segnata sul contorno del disco stesso, misurata col nonio, che permette di valutare $^1/_3$ di grado, serve a determinare le radici con un'esattezza maggiore. Osserviamo perciò che ciascuna delle lunghezze $1\,A_1$ non è altro che la tangente trigonometrica dell'angolo di cui si è dovuto far ruotare il disco mobile per condurre l'asse OX dalla sua direzione primitiva 0 1 alla nuova posizione OA_1. Queste tangenti trigonometriche si potranno quindi ottenere, con approssimazione assai più grande di quanto comporti la semplice misura delle radici sul disco quadrettato, mediante una tavola numerica o grafica.

Il senso in cui devono essere tracciati i lati della poligonale primitiva dipende dal segno dei coefficienti rappresentati da questi lati. Affinchè la poligonale non corrisponda che ad una sola equazione, e reciprocamente, è necessaria una convenzione la quale permetta di determinare questo senso senza alcuna ambiguità. Si può seguire, a tale scopo, la regola seguente. Immaginiamo un quadrato 0123, di cui il lato 0 1 sia parallelo al lato 0 1 della poligonale. Il senso dei lati 0 1, 1 2, 2 3, 3 0 di questo quadrato è perfettamente determinato, e può rappresentare il senso secondo cui devono essere portati i lati della poligonale che corrispondono a coefficienti positivi. Il senso opposto dovrà essere seguito per i lati corrispondenti a coefficienti negativi. Il primo lato 0 1 del quadrato determinerà il senso del primo lato della poligonale e di tutti quelli dell'ordine $4n + 1$; i lati successivi 1 2, 2 3, 3 0 del quadrato stesso determineranno rispettivamente i sensi dei lati della poligonale corrispondenti ai coefficienti dei termini di ordine

$$4n + 2,\quad 4n + 3,\quad 4n.$$

Quando si sono determinati r radici dell'equazione proposta, se non è più possibile di ottenere, col procedimento indicato, alcun'altra radice, si deve concludere che le $m - r$ altre radici sono immaginarie. Anche queste si possono ottenere collo stesso apparecchio, e con una costruzione simile a quella descritta, nella quale però le poligonali da tracciarsi non hanno i vertici sopra i lati della poligonale primitiva.

Sistema articolato di Peaucellier.

Il sistema articolato di Peaucellier (1) può essere applicato sia come organo meccanico capace di trasformare esattamente un moto circolare alterno in moto rettilineo alterno, sia quale apparecchio atto al tracciamento di curve, sia infine quale strumento di calcolo; noi non lo considereremo che sotto quest'ultimo punto di vista.

L'apparecchio è formato essenzialmente da un rombo articolato ABCD (fig. 690, 691), di cui i vertici opposti B e D sono ancora articolati ai due bracci uguali OD, OB, girevoli attorno al punto fisso O. Se i due

(1) Questo sistema articolato risolve esattamente un importante problema di Cinematica, che fu oggetto degli studi e delle ricerche di insigni matematici e costruttori, e che per molto tempo si ritenne insolubile. Esso serve cioè a trasformare un moto circolare alterno in un moto rettilineo alterno senza l'impiego di ruote, di guide o di scorritoi; col sistema di Peaucellier tale problema è risolto con tutta esattezza geometrica, mentre, come è noto, nei parallelogrammi di Watt, di Bourdon, di Alexander, ecc., è risolto per sola approssimazione. Questa elegante soluzione del problema di Watt è stata pure trovata dal russo Lipkine di Saint-Petersbourg, allievo dell'illustre Tchebicheff, nel 1871, ed indipendentemente dai lavori del colonnello francese Peaucellier, i quali datano dal 1864.

bracci OD, OB sono più lunghi dei lati del rombo (fig. 690), il punto O è esterno a questo, ed i due segmenti OA, OC cadono nel medesimo senso; allora il sistema è *positivo*. Se invece i bracci OD, OB, sono minori dei lati del rombo (fig. 691), il punto O cade internamente al rombo, ed i due segmenti OA, OC hanno sensi e quindi segni contrarii; in questo secondo caso il sistema è *negativo*.

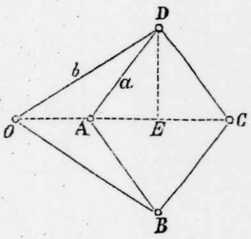


Fig. 690.

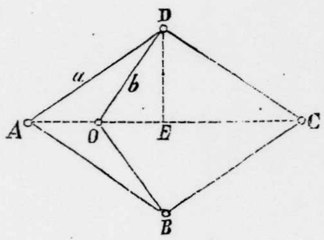


Fig. 691.

Spostando il vertice A lungo una retta passante per il punto fisso O, il vertice C percorre questa retta stessa, ed è facile dimostrare che *il prodotto dei due segmenti* OA, OC *si mantiene costante.*

Ed invero, abbassiamo dal vertice D la perpendicolare DE sopra AC, indichiamo con a la lunghezza dei lati del rombo, con b quella dei due bracci, e facciamo, nel caso della figura 690,

$$OA = +x, \quad OC = +y;$$

Allora si ha:

$$AE = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2}(y-x);$$

$$b^2 = DE^2 + \left(x + \frac{1}{2}(y-x)\right)^2;$$

$$a^2 = DE^2 + \frac{1}{4}(y-x)^2;$$

e per conseguenza:

$$xy = b^2 - a^2 = \text{costante}.$$

Nel caso della figura 691 facciamo

$$OA = -x, \quad OC = +y;$$

allora:

$$AE = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2}(x+y);$$

$$b^2 = DE^2 + \left(\frac{1}{2}(x+y) - x\right)^2;$$

$$a^2 = DE^2 + \frac{1}{4}(x+y)^2;$$

e quindi:

$$-xy = b^2 - a^2 = \text{costante}.$$

Il valore costante $b^2 - a^2$ di questo prodotto è chiamato *modulo:* esso è positivo o negativo, secondochè il punto O cade all'esterno od all'interno del rombo articolato ABCD.

L'ultima eguaglianza si può anche scrivere così:

$$xy = a^2 - b^2.$$

Considerando quindi il modulo come una quantità sempre positiva espressa da $b^2 - a^2$ o da $a^2 - b^2$ secondochè b è maggiore o minore di a, ed indicandolo con M^2, si ha per i due casi:

$$xy = M^2.$$

Si supponga ora che la retta OC rappresenti una scala delle parti uguali di cui l'unità di lunghezza sia eguale ad M; allora se si porta il vertice A sopra una qualunque delle divisioni di questa scala, il vertice C segna il valore reciproco di quello segnato dal punto A. Infatti dall'equazione $OA \times OC = M^2$ si ottiene:

$$\frac{OA}{M} = \frac{1}{\frac{OC}{M}};$$

e, per $M = 1$:

$$OA = \frac{1}{OC}.$$

In questo caso l'apparecchio prende il nome di *reciprocatore.*

È facile vedere che se l'unità di lunghezza della scala ha un valore qualunque U, il punto C segna il prodotto del valore reciproco di OA per $\left(\frac{M}{U}\right)^2$.

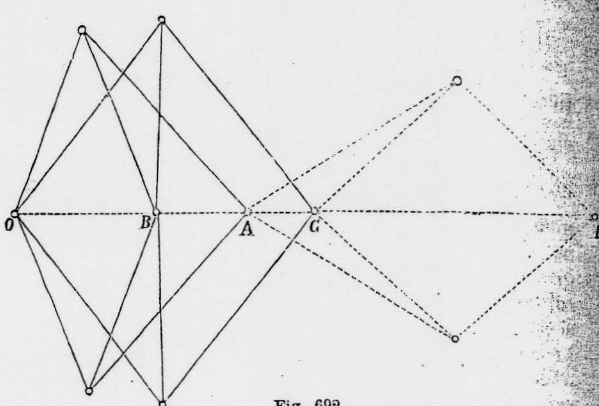


Fig 692.

L'elevazione alla terza potenza e l'estrazione della radice cubica si ottengono col mezzo di tre reciprocatori disposti come indica la figura 692 ed aventi lo stesso modulo M^2. Facendo $OA = x$, si ha successivamente:

$$AB = \frac{M^2}{x}, \qquad BC = \frac{M^2}{OB}, \qquad AD = \frac{M^2}{AC}.$$

Ma:

$$OB = OA - AB = \frac{x^2 - M^2}{x},$$

$$AC = BC - AB = \frac{M^4}{x(x^2 - M^2)},$$

$$OD = OA + AD = \frac{x^3}{M^2};$$

per conseguenza:

$$\frac{OD}{M} = \left(\frac{x}{M}\right)^3,$$

e, per $M = 1$

$$OD = x^3.$$

Il Sylvester modificò il sistema articolato di Peaucellier aggiungendovi due nuove aste articolate, ed ottenne un meccanismo con cui si può ottenere la radice quadrata di un binomio quadratico ad una variabile. Questo apparecchio, che il Sylvester chiama *extracteur binôme quadratique*, combinato convenientemente col sistema di Peaucellier, permette di ottenere le seconde potenze, le radici quadrate, e di risolvere parecchie altre questioni di matematica (1).

(1) *Revue scientifique*, 1874, pag 490-498. — A. Favaro, op. cit.

Regolo scontatore Baratta.

Il signor Carlo Alcibiade Baratta, professore nell'Istituto Tecnico di Carrara, ha presentato all'Esposizione Nazionale Italiana tenutasi in Torino nel 1884, un regolo speciale, che egli chiama *regolo scontatore*, destinato alla ricerca del numero dei giorni compreso fra una data ed un'altra. Questo regolo è rappresentato, in scala metà del vero, nella fig. 4 della Tav. X.

Esso consta di due parti, una fissa ed una scorrevole nella prima. La parte fissa porta lungo i lembi della scanalatura intermedia due scale divise in parti uguali. La scala superiore corrisponde all'*anno commerciale* e comprende 12 divisioni principali uguali, che rappresentano i 12 mesi dell'anno; ognuna di queste divisioni principali è divisa alla sua volta in 30 parti uguali corrispondenti ai 30 giorni di ciascun mese commerciale. La scala inferiore corrisponde invece all'*anno solare*. Essa ha l'estremo sulla stessa retta normale alla lunghezza del regolo che passa per l'origine della scala precedente, e comprende pure 12 parti principali, che rappresentano i 12 mesi dell'anno; queste parti però non sono uguali, e ciascuna di esse comprende tante divisioni minori della scala superiore quanti sono i giorni che ciascun mese ha effettivamente. Così gennaio ne ha 31, febbraio 28, marzo 31, e così via: questa scala porta quindi 365 divisioni uguali.

Sullo scorrevole sono segnate due scale identiche alle precedenti; però in queste la numerazione procede di seguito, cioè va da 1 fino a 360 per la scala superiore, e da 1 fino a 365 per la scala inferiore.

Qualche esempio sarà sufficiente per dimostrare il modo di valersi di questo strumento semplicissimo. Richiedasi, ad es., il numero dei giorni compreso fra il 15 aprile ed il 31 dicembre dello stesso anno. Volendo fare il computo secondo l'anno commerciale, si dispone lo scorrevole in modo che la sua origine coincida colla divisione 15 aprile della scala superiore; il numero 255 indicato sullo scorrevole dalla divisione 30 dicembre del fisso ci esprime il numero cercato. Se invece si volesse il numero dei giorni compreso fra le stesse date in un anno solare, si dispongono le cose in modo analogo, valendosi delle due scale corrispondenti all'anno solare: in tal caso si otterrebbe 260.

Nell'uso del regolo scontatore descritto devesi por mente ad alcune avvertenze. Ricercando i giorni compresi fra due date nell'anno solare, se questo è bisestile, è necessario di aumentare di 1 il numero ottenuto col regolo, perchè il mese di febbraio è computato nel medesimo di soli 28 giorni. Nel numero dei giorni dati dal regolo non è compreso il giorno da cui incomincia il tempo richiesto, ma vi è compreso quello in cui termina.

Il tempo trascorso fra un giorno di un dato anno ed un giorno di un anno successivo si può ottenere scindendo il calcolo in due o più parti. Così richiedasi il numero dei giorni compresi, nell'anno solare, fra il 5 settembre 1887 ed il 15 maggio 1888. Con una prima operazione si ricerca il numero dei giorni compreso fra il 5 settembre 1887 ed il 31 dicembre 1887, e poi con una seconda operazione quello compreso fra il 31 dicembre 1887 ed il 15 maggio 1888; i risultati delle due operazioni si sommano. Siccome poi in ciascuna operazione, come si è già avvertito poc'anzi, non si computa il giorno da cui incomincia il calcolo, nella seconda operazione, disponendo le origini delle due scale dell'anno solare in corrispondenza, si troverebbe il numero dei giorni fra il 1° gennaio 1888 ed il 15 maggio 1888, non compreso il 1° gennaio. Perciò al secondo numero ottenuto col regolo sarebbe necessario di aggiungere 1, il che si può anche ottenere, come suggerisce il Baratta, assumendo nella seconda operazione la seconda divisione dello scorrevole come origine. Tenendo conto di questa avvertenza, si trova che fra il 5 settembre 1887 ed il 31 dicembre 1887 vi sono 117 giorni e fra il 31 dicembre 1887 ed il 15 maggio 1888 vi sono 135 giorni. Notando infine che l'anno 1888 è bisestile e che nel computo vi è compreso il mese di febbraio, devesi aggiungere ancora 1; cosicchè in totale il numero dei giorni cercato è

$$117 + 135 + 1 = 253.$$

Il regolo scontatore Baratta, applicato agli usi correnti del commercio e degli Istituti di credito, oltre al facilitare notevolmente la ricerca del tempo, riduce un calcolo abbastanza lungo e noioso ad una semplice operazione meccanica, escludendo così le maggiori cause di errore.

Regolo rettificatore di Reuleaux.

Fra i tanti regoli ed apparecchi speciali a divisione non logaritmica destinati alla risoluzione di un determinato problema, citiamo ancora il *regolo rettificatore* proposto dall'illustre Reuleaux. Le due estremità di questo regolo sono rappresentate in grandezza naturale dalla figura 693.

Esso ha la forma di un doppio decimetro ordinario; però la sua lunghezza è notevolmente maggiore, poichè raggiunge circa m. 0.32. Sopra di un lato è incisa la scala metrica: essa è lunga m. 0.30, ed è divisa in centimetri, millimetri e mezzi millimetri; sulle divisioni principali sono segnati i numeri 0, 1, 2, ... 30. L'altro lato porta una scala speciale, la cui lunghezza totale è di m. 0.31415, cioè è uguale alla lunghezza di una circonferenza che ha per diametro cm. 10; questa scala è divisa in 10 parti uguali distinte coi numeri 0, 1, 2, ... 10; ciascuna di queste parti principali è suddivisa alla sua volta in 10 parti uguali, ed ognuna di queste ultime è ancora divisa per metà.

Il regolo rettificatore serve alla risoluzione dei due seguenti problemi grafici: dato un segmento rettilineo che rappresenta il diametro di un circolo, costruirne la circonferenza rettificata; e, reciprocamente, dato un segmento rettilineo che rappresenta la circonferenza di un circolo, costruirne il diametro. Nel primo caso si misura colla scala metrica il diametro dato, e, capovolto il regolo, si segnano sopra di una retta indefinita i due punti della scala maggiore del regolo che corrispondono all'origine ed alla divisione di questa scala su cui si legge il numero che esprime la misura del diametro; la distanza compresa fra i due punti così ottenuti ci dà la circonferenza rettificata richiesta. Quando è dato invece un segmento rettilineo che rappresenta la circonferenza di un circolo di cui si vuole costrurne il diametro, si misura il segmento proposto colla scala maggiore del regolo; il numero che esprime questa misura rappresenta, in centimetri, il diametro della circonferenza data; portandolo colla scala metrica sopra di una retta indefinita si avrà il diametro cercato.

Nel regolo rettificatore, quale fu fatto costrurre dal Reuleaux, le origini delle due scale si trovano entrambe alla sinistra di chi guarda lo strumento colla scala metrica posta in alto. Tale disposizione presenta qualche difficoltà quando il regolo deve essere capovolto per misurare le distanze colla scala maggiore. L'inconveniente può essere evitato, disponendo, come suggerisce

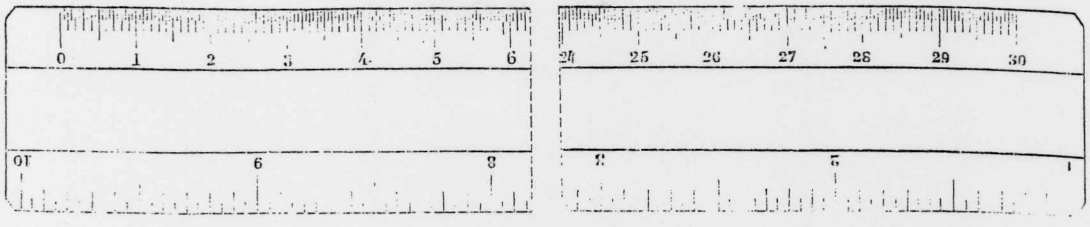


Fig. 653.

il professore D. Tessari (1), l'origine della scala maggiore dalla parte opposta: la figura rappresenta appunto il regolo modificato a questo modo.

Il regolo rettificatore permette eziandio la risoluzione dei due problemi numerici corrispondenti a quelli grafici testè enunciati: dato il diametro di un circolo, calcolarne la lunghezza della circonferenza; e, reciprocamente, data la lunghezza della circonferenza di un circolo, calcolarne il diametro. Il procedimento da seguirsi non cambia; però nel problema diretto sarà necessario di misurare colla scala metrica la circonferenza rettificata ottenuta, e nel problema inverso di rappresentare graficamente, ancora colla scala metrica, la circonferenza data numericamente.

A rendere speditissima anche la risoluzione di questi problemi numerici, le due scale dovrebbero essere coincidenti, cioè disposte una da un lato e l'altra dall'altro di una medesima retta e coll'origine comune. Allora, in corrispondenza di una divisione qualsiasi della scala metrica si legge senz'altro sulla scala maggiore il numero che rappresenta il diametro di un circolo di cui la prima divisione rappresenta la circonferenza; e, reciprocamente, in corrispondenza di un diametro qualsiasi letto sulla scala maggiore, si legge sulla scala metrica, la circonferenza corrispondente. Queste due scale coincidenti, che ciascuno all'occorrenza può costruire con maggiore o minore estensione sopra una striscia di carta da disegno, potrebbero anche essere incise sul regolo rettificatore disponendole contro una retta intermedia tracciata parallelamente ai due spigoli longitudinali. Le scale coincidenti fisse, di cui non abbiamo ora considerato che un caso particolare, si applicano in molti altri calcoli. Graduando convenientemente la scala che si dispone di fronte a quella delle parti uguali, si possono costruire le scale speciali che permettono di determinare: l'area di un circolo di diametro noto o reciprocamente; i quadrati; i cubi; le radici quadrate; le radici cubiche; i logaritmi dei numeri; le linee trigonometriche, ecc.; esse sostituiscono, nei calcoli approssimati, le ordinarie tavole numeriche, e la loro applicazione è utile in parecchi casi.

Regoli ed apparecchi a divisione logaritmica.

Pochi anni dopo che Napier ebbe stabilita la teoria dei logaritmi, il professore Edmondo Gunter (1581-1626) di Londra, quello stesso che si era appropriata l'invenzione del compasso di proporzione di Galileo Galilei, propose una scala logaritmica, per mezzo della quale si potevano eseguire i calcoli. Le scale logaritmiche di Gunter (2), note in Inghilterra sotto le denominazioni di *Gunter's line*, *Common gunter*, *Navigation scale*, benchè richiedessero l'uso del compasso ordinario, si diffusero rapidamente. Il Wingate (1593-1656), per dispensarsi dall'uso del compasso, che rendeva poco spedite le operazioni e poteva essere causa di errori, distribuì le divisioni logaritmiche sopra due regoli, l'uno dei quali era scorrevole contro l'altro. Quasi contemporaneamente l'Oughtred (1574-1660) ideava di tracciare queste divisioni sopra due cerchi concentrici, muniti di due indici mobili attorno al centro comune, e nel 1650 il Milburne tracciava le divisioni stesse sopra di un'elica. Finalmente, nel 1657, Seth Partridge faceva costruire a Londra da Walter Haynes le scale logaritmiche nella forma di regolo scorrevole che esse hanno oggidì. Il nuovo strumento sostituì ben presto le scale primitive di Gunter, e per opera di Henrion (1657), Leybourn, John Robertson (1776), Jones (1814), ecc., che lo resero sempre più perfetto e comodo per l'uso, ricevette numerose applicazioni. Fabbricato dapprima da Boulton e Watt a Soho in vicinanza di Birmingham, prese il nome di *Soho-scale*, e di *Soho-rule*, e poco dopo quello di *Sliding-rule*, che conserva tuttavia. Dall'Inghilterra gli strumenti a divisione logaritmica si estesero mano mano a tutta l'Europa.

In Germania il Biler costrusse nel 1696 uno strumento semicircolare, l'*instrumentum mathematicum universale*, simile al quadrante di Oughtred, in cui però erano soppressi gli indici, rendendo il cerchio interno girevole sull'asse dello strumento. Dopo il Biler si occuparono di tali apparecchi in Germania: Scheffelt (1652-1720), che propose il suo *Pes mechanicus*, il quale richiedeva ancora l'uso del compasso; Leupold (1674-1727), che descrisse ed ampliò il *Pes mechanicus*; Lambert, che nel 1761 suggerì egli pure l'impiego di due regoli scorrevoli l'uno sull'altro in modo da poter mettere in contatto due tratti delle due scale; ecc.

In Francia, dove il germe di queste nuove invenzioni era stato importato direttamente dal Gunter, fra le macchine ed invenzioni approvate dall'Accademia Reale delle Scienze di Parigi nel 1727 troviamo « un instrument de Mr. Clairaut (1713-1765), par le moyen du quel on peut prendre les angles, faire les calculs arithmétiques, tels que la multiplication, la division, l'extention des racines, et résoudre les triangles rectangles. C'est un cercle de carton gradué, de 21 pouces de diamètre, dans lequel Mr. Clairaut a décrit un grand nombre de circonférences concentriques pour exprimer par les longueurs de ces circonférences les logaritmes des nombres et ceux des sinus ». Nel 1741 Camus propose un *instrument propre à jauger les tonneaux et autres vaisseaux*, ecc., simile allo *sliding-rule*; anche il Leadbetter (1750), Bougner (1698), Saverien (1753), Lemonnier (1766), Pézenas (1768), Fortin (1776) e Lalande, si occuparono in modo più o meno completo del regolo lo-

(1) D. Tessari, *La teoria delle ombre e del chiaroscuro* (Torino 1878) pag. 67.

(2) A. Favaro, *Sulla elica calcolatoria di Fuller con cenni storici sopra gli strumenti calcolatori a divisione logaritmica* (*L'Ingegneria civile*, ecc., Torino 1879, pag. 138).

garitmico a scorrevole. Verso il finire del secolo scorso l'estesa applicazione degli strumenti logaritmici in Francia è dovuta in special modo all'art. XIX della legge del 18 germinale, anno III della Repubblica francese, che prescriveva la costruzione di scale metriche per la riduzione senza calcoli delle misure antiche in misure decimali: il *cadran logarithmique* proposto nel 1795 da Leblond, e riprodotto nel 1798 dal Gattey sotto il nome di *aritmographe*, ebbe certamente origine da tale disposizione. Questi due apparecchi però non differiscono essenzialmente dal quadrante di Oughtred, modificato da Biler. Alla categoria degli strumenti circolari appartengono eziandio le *boîtes à calculer* di Hoyau (1815). Tutte queste disposizioni non ebbero un grande successo, e furono ben presto sostituite dal regolo a scorrevole, che si estese rapidamente. Il merito principale di tale diffusione in Francia è dovuto al Jomard (1777-1862), il quale, mercè l'appoggio della *Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, seppe indurre il Lenoir a farsi fabbricatore di regoli a scorrevole, secondo il tipo che i fratelli Jones costruivano allora in Inghilterra.

In Austria gli apparecchi a divisione logaritmica furono introdotti verso il 1840 dai professori Adam Burg e Schulz von Strassnicki, ed in Italia pochi anni dopo dall'illustre Quintino Sella (1).

Nel secolo presente tali apparecchi, ed in particolar modo il regolo a scorrevole, sono entrati nell'uso comune della pratica: essi sono specialmente diffusi nell'Inghilterra, ove i commercianti, gli industriali, e le persone tecniche, li impiegano per i calcoli correnti. Oggidì questi apparecchi hanno assunto forme e disposizioni svariatissime, e molti di essi sono speciali per certi calcoli particolari di uso frequentissimo nei singoli rami industriali. Il dotto professore Favaro, nella sua pubblicazione precedentemente citata, enumera, oltre ai *regoli ordinari* ed alla *Gunter's line*, ben 45 apparecchi diversi a divisione logaritmica, cioè:

1. *Sliding-rule.*
2. Regolo di Oesterle.
3. *Règle à calcul* di Lenoir.
4. Regolo di Schwind.
5. *Engineers sliding-rule.*
6. Regolo di L. C. Schulz von Strassnicki.
7. *Inverted slide rule.*
8. Regolo di Higgison.
9. *Improved calculating rule.*
10. *For mill wrights.*
11. *For marine use.*
12. *For timber mensuring.*
13. *Dr. Roget sliding rule for involution and evolution.*
14. *Sliding-rule* per ragguagli di prezzi.
15. Regolo chimico di Wollaston.
16. Regolo di Sedlaczek per i calcoli d'interpolazione.
17. Regolo di Hoare.
18. Palmer's *Computing Scale.*
19. Fuller's *Computing telegraph.*
20. Disco logaritmico di Sonne.
21. Aritmoplanimetro di Lalanne.
22. *Règle à calcul à enveloppe de verre* di Lalanne.
23. *Abaque* di Lalanne.
24. Regolo a scale ripiegate di Mannheim.
25. *Rechenknecht* di Herrmann.
26. Regolo di Soldati per i calcoli di celerimensura.
27. *Arithmographe polychrome* di Dubois.
28. Aritmografo circolare.
29. Aritmografo cilindrico.
30. Stereometro di Puscariu.
31. *Universal Proportion Table* di Everett.
32. *Cercle à calcul* di Boucher.
33. Routledge's *Slide rule.*
34. Hawthorn's *Slide rule.*
35. Builder's *Calculating slide rule.*
36. *Règle à calcul* Tavernier Vinay e Tavernier Gravet.
37. Coggeshall's *Sliding-rule.*
38. Bradford's *Sliding-rule.*
39. Scale logaritmiche centesimali di Porro.
40. Regolo inglese a due linguette.
41. *Règle à calcul à deux règlettes* di Peraux.
42. *Rechenstab* di Dennert e Pape.
43. *Rechenstab* di Eschmann perfezionato da Wild.
44. *Règle logarithmique pour la tachéométrie* di Moinot.
45. Aritmografo di Castigliano.

A cui sono da aggiungersi le *scale logaritmiche* dell'ingegnere Berri, ed i numerosi altri regoli logaritmici destinati a scopi speciali, che ciascuno potrà costruirsi assai facilmente anche con carta da disegno, quando si tratti di determinate operazioni da eseguirsi un considerevole numero di volte.

Prima di procedere alla descrizione dei più importanti fra i vari apparecchi citati, gioverà riassumere le principali proprietà dei logaritmi e delle scale logaritmiche.

Logaritmi e loro proprietà principali. Se tra i numeri B, M, X, sussiste la relazione:

$$B^X = M,$$

si dice che X è il *logaritmo* del *numero* M nel sistema di *base* B, e si scrive:

$$X = \log. M.$$

Le proprietà principali dei logaritmi sono:

1ª *In un sistema qualsiasi di logaritmi l'unità ha per logaritmo 0 e la base ha per logaritmo* 1:

$$\log. 1 = 0;$$
$$\log. B = 1.$$

2ª *Quando la base di un sistema è* > 1, *i numeri maggiori dell'unità hanno i logaritmi positivi, ed i numeri minori dell'unità hanno i logaritmi negativi. Accade l'opposto se la base è* < 1.

3ª *Il logaritmo del prodotto di più numeri è uguale alla somma dei logaritmi di questi numeri:*

$$\log. M \times N \times P \times ..... = \log. M + \log. N + \log. P + ...$$

4ª *Il logaritmo del quoziente di due numeri è uguale alla differenza dei logaritmi di questi numeri:*

$$\log. \frac{M}{N} = \log. M - \log. N.$$

5ª *Il logaritmo della potenza di un numero è uguale, comunque l'esponente sia intero o frazionario, positivo o negativo, al prodotto dell'esponente per il logaritmo di questo numero:*

$$\log. M^n = n \log. M;$$

$$\log. M^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log. M;$$

$$\log. M^{-n} = \log. \frac{1}{M^n} = \log. 1 - \log. M^n = -n \log. M.$$

(1) *Teoria e pratica del regolo calcolatore*, per QUINTINO SELLA. Torino 1859.

La base B dei logaritmi è un numero che si può scegliere ad arbitrio; per le applicazioni ai calcoli numerici è più appropriata la base 10, e le tavole di cui abitualmente servonsi i calcolatori contengono appunto i logaritmi in tale base, o, come dicesi, i logaritmi *volgari* o di *Briggs*.

Nei logaritmi volgari si hanno le seguenti uguaglianze:

$$\log. 1 = 0; \quad \log. 10 = 1; \quad \log. 100 = 2;$$
$$\log. 1000 = 3; \quad \ldots\ldots \quad \log. 10^n = n;$$

da cui scorgesi che ogni numero compreso fra 0 e 10, cioè ogni numero intiero o frazionario la cui parte intiera ha una sola cifra, ha un logaritmo compreso fra 0 ed 1, cioè un logaritmo che, scritto in decimali, ha *zero* per parte intiera. Ogni numero compreso fra 10 e 100, cioè ogni numero di due cifre intiere, ha un logaritmo compreso fra 1 e 2, cioè che ha 1 per parte intiera. In generale poi il logaritmo di un numero di m cifre intiere ha per parte intiera il numero $m - 1$.

Nel logaritmo di un numero la parte intiera prende il nome di *caratteristica*, la parte frazionaria di *mantissa;* dunque:

6ª *La caratteristica del logaritmo volgare di un numero* $>$ 1 *è espressa dal numero delle cifre intiere di questo numero, diminuito di* 1. Così la caratteristica del logaritmo volgare di 43850.008 è 4; la caratteristica del logaritmo di 2.452 è 0.

7ª *La mantissa del logaritmo volgare di un numero qualunque* $>$ 1 *non varia col moltiplicare o dividere il numero stesso per una potenza intiera di* 10; *purchè, nel caso della divisione, il quoziente non sia minore dell'unità.*

Infatti, se M è il numero proposto, si hanno le seguenti uguaglianze:

$$\log. 10^n \times M = \log. 10^n + \log. M = n + \log. M;$$

$$\log. \frac{M}{10^n} = \log. M - \log. 10^n = \log. M - n.$$

Dunque il logaritmo del prodotto o del quoziente si ottiene aggiungendo o togliendo al logaritmo di M il numero intiero n: la sua mantissa quindi non si altera, purchè, nel caso della sottrazione, log. M sia maggiore di n.

Ne consegue che la mantissa del logaritmo, ad es., di 425 è la stessa che quella dei logaritmi di 4250; 42500; 425000: .... o di 42.5; 4.25.

Trattandosi di frazioni decimali i logaritmi sono negativi; però per comodità di calcolo converrà preparare questi logaritmi in guisa che ne risulti negativa la sola caratteristica.

Una frazione decimale ha zero od un numero negativo di cifre intiere, e questo numero di cifre è dato dal numero dei zeri compreso fra la virgola e la prima cifra significativa della frazione, così il numero 0.452 ha *zero* cifre intiere; i numeri 0.00452 e 0.000452 hanno rispettivamente —2 e —3 cifre intiere. Ora una frazione decimale M, che ha $-m$ cifre intiere può ridursi ad avere una cifra intiera, e quindi ad essere $>$ 1, moltiplicandola per 10^{m+1}; ma:

$$\log. 10^{m+1} \times M = \log. M + (m+1),$$

e quindi

$$\log. M = \log. 10^{m+1} \times M - (m+1).$$

La prima parte $\log. 10^{m+1} \times M$ è una frazione positiva, e può chiamarsi la *mantissa* di log. M; la seconda parte $-(m+1)$ è un numero intiero negativo, che può chiamarsi la *caratteristica* del logaritmo stesso. Così le caratteristiche di 0.00452 e di 0.000452 sono rispettivamente -3 e -4, ed avremo:

$$\log. 0.00452 = \log. 4.52 - 3 = 0.655 - 3;$$
$$\log. 0.000452 = \log. 4.52 - 4 = 0.655 - 4;$$

o, come taluni scrivono:

$$\log. 0.00452 = \bar{3}.655;$$
$$\log. 0.000452 = \bar{4}.655;$$

ove il segno — sopra la caratteristica indica che essa soltanto è negativa.

Fatte queste convenzioni, possiamo ritenere che le proprietà 6ª e 7ª, stabilite testè per i numeri maggiori di 1, si estendono pure ai numeri minori di 1.

Scale logaritmiche semplici. — Tracciata una retta indefinita, si prenda sopra di essa un segmento di lunghezza conveniente, e si divida questo segmento in un numero qualunque di parti uguali, ad es. in 500 (fig. 694): assumendo quale unità di misura la lunghezza del segmento considerato, e distinguendo, come in figura, le varie divisioni coi numeri 0, 10, 20, ... 500, la distanza di una divisione qualsiasi di questa scala delle parti uguali dall'origine è espressa, in cinquecentesimi, dal numero scritto sulla divisione stessa, ed in millesimi dal doppio di questo numero. Sulla medesima linea retta portiamo a partire dal punto 0, ed assumendo ancora per unità di misura la lunghezza precedente, delle distanze proporzionali ai logaritmi volgari 0.301, 0.477, 0.602, ... 1, dei numeri intieri 2, 3, 4, ... , 10: la scala delle parti uguali permetterà di determinare molto facilmente i punti di divisione di questa nuova scala. Sopra questi punti segniamo, dalla parte opposta a quella in cui è segnata la scala delle parti uguali, i numeri: 1 all'origine; 2, 3, 4, ... 9 nei punti intermedii; e 10 all'estremo. Ognuna di queste parti principali suddividiamola, seguendo la stessa legge, in 10 parti minori, che corrispondano ai numeri 1.1, 1.2, 1.3, ..., 9.9, e sui nuovi punti di divisione segniamo od intendiamo segnati questi numeri. Allo stesso modo queste parti minori si dividano in altre parti minori, e così di seguito finchè sarà conveniente spingere la suddivisione. È da notarsi però che in una scala logaritmica la distanza fra le divisioni principali prossime all'origine è notevolmente più grande della distanza fra le divisioni principali prossime all'estremo. Per conseguenza, la suddivisione non può essere spinta ugualmente in tutta l'estensione della scala; così, nel nostro caso, le divisioni segnate sulla scala logaritmica corrispondono ai numeri:

1, 1.02, 1.04, ... 2,
2.05, 2.10, 2.15, ... 5,
5.1, 5.2, 5.3, ... 10.

Sulla stessa scala poi, oltre ai numeri a cui corrisponde una divisione, si può leggere qualunque altro numero compreso fra 1 e 10, immaginando diviso l'intervallo fra le due divisioni consecutive fra cui cade questo numero in parti approssimativamente uguali, e stimando ad occhio il punto della scala che corrisponde presso a poco al numero dato. Così il punto della scala logaritmica corrispondente a 1.47 sarebbe a circa metà distanza fra le divisioni 1.46 e 1.48; il punto della scala corrispondente al numero 4.53 sarebbe a circa i 3/5 della distanza compresa fra le divisioni 4.50 e 4.55. In tal modo si possono valutare le cifre intiere, i decimi ed i centesimi; si potrebbe tener conto di ulteriori cifre decimali, ove la lunghezza della scala permettesse una suddivisione maggiore, cosicchè possiamo ritenere fin d'ora che l'approssimazione, con cui si potrà fare una lettura sopra la scala logaritmica, dipende dalla lunghezza della scala medesima.

La scala logaritmica colla corrispondente scala delle parti uguali in coincidenza, che ognuno può all'occorrenza costruirsi su carta da disegno, rappresenta una tavola dei logaritmi, e permette, come questa, di trovare il logaritmo di un numero dato, o reciprocamente. Questi problemi si risolvono con una semplice lettura sulle due scale, poichè ad un numero qualsiasi letto sulla scala logaritmica, si legge in corrispondenza sulla scala delle parti uguali la mantissa del suo logaritmo (colla numerazione segnata in figura i numeri di quest'ultima scala devono ancora essere moltiplicati per 2); ed in corrispondenza di un numero qualunque letto sulla scala delle parti uguali si legge sulla scala logaritmica il numero, il cui logaritmo ha per mantissa (divisa per 2 nel nostro caso) il primo.

Sulla scala logaritmica non si leggono direttamente che i numeri compresi fra 1 e 10; tuttavia essa può applicarsi per qualsiasi altro numero, ricordando che la mantissa del logaritmo di un numero non varia comunque si moltiplichi o si divida il numero stesso per una potenza intiera di 10; od in altre parole comunque se ne trasporti la virgola alla destra od alla sinistra. Dato quindi un numero M qualunque, noi possiamo sempre ridurlo ad un altro compreso tra 1 e 10, e quindi direttamente leggibile sulla scala logaritmica, dividendolo per 10^{m-1}, ove m è il numero positivo o negativo delle sue cifre intiere. La mantissa di log. M è quindi log. $\frac{M}{10^{m-1}}$; ottenuta questa colla scala logaritmica, basterà aggiungervi la caratteristica $m - 1$. Così, essendo richiesto log. 4350, si cerca log. 4.35 sulla scala logaritmica e si ottiene 0.64 che rappresenta la mantissa del logaritmo cercato; la sua caratteristica sarà 3, cosicchè log. 4350 = 3.64. Se fosse richiesto log. 0.00435 si cerca ancora log. 4.35 sulla scala logaritmica, e si prende per caratteristica — 3, cosicchè log. 0.00435 = 0.64 — 3 = $\bar{3}$.64.

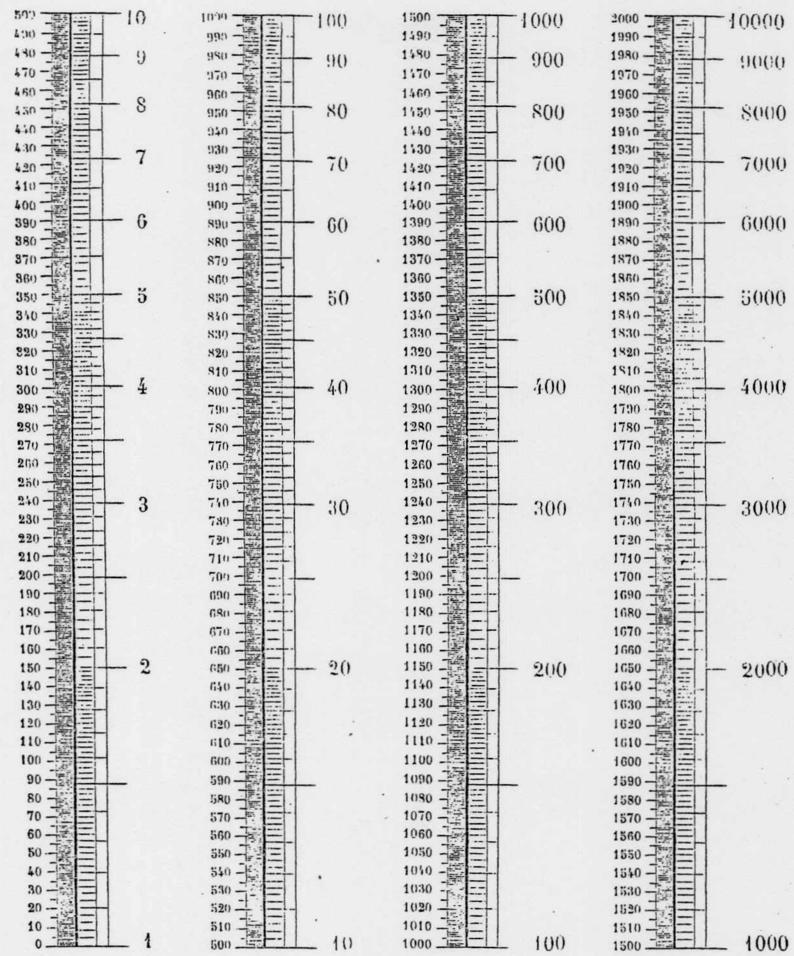


Fig. 694.

Scala logaritmica multipla. — Costruita nel modo indicato una scala logaritmica estesa dall'1 al 10, supponiamo che sulla medesima retta e partendo dall'estremo 10 considerato come origine, si costruisca un'altra scala logaritmica identica alla prima. Si ottiene così una scala *logaritmica doppia*, la cui lunghezza totale è doppia della lunghezza della scala primitiva, ed in cui ciascuna delle due parti, considerata indipendentemente dall'altra, gode delle proprietà che conosciamo. Se però, nel considerare la seconda metà della scala logaritmica doppia, si suppone presa per origine, non la divisione 10 che sta a metà, ma l'origine stessa 1 della scala semplice primitiva, *le divisioni della seconda metà corrispondono a numeri decupli di quelli a cui corrispondono le stesse divisioni lette nella prima metà della scala.* La cosa è manifesta quando si osservi che la distanza di una divisione qualunque della seconda scala semplice dall'origine 1 è uguale alla lunghezza della scala, cioè all'unità di lunghezza, più la distanza fra la divisione omologa della prima scala semplice e la stessa origine 1.

Sulla doppia scala logaritmica si possono quindi leggere direttamente tutti i numeri da 1 a 100: quelli minori di 10 nella prima, quelli maggiori di 10 nella seconda metà.

Analogamente se si formassero 3, 4, 5, ... scale logaritmiche semplici identiche, disposte l'una di seguito all'altra, si scorge allo stesso modo che le divisioni della terza scala corrispondono ai numeri da 100 a 1000; quelle della quarta da 1000 a 10000; quelle della quinta da 10000 a 100000; ecc.

La fig. 694 rappresenta una scala logaritmica quadrupla, unita alla scala delle parti uguali, ove per comodità le 4 parti che la costituiscono sono staccate l'una dall'altra, ed in cui sono posti in evidenza i numeri che corrispondono realmente alle varie divisioni. Avvertiamo però che, in generale, sulle divisioni delle varie scale semplici che costituiscono una scala logaritmica multipla sono scritti gli stessi numeri 2, 3, 4, ... 9, 10, della prima: essi significano, come abbiamo detto: 20, 30, 40, ... 90, 100, nella seconda; 200, 300, ... 900, 1000 nella terza; e così via.

Con una scala logaritmica multipla, e colla scala delle parti uguali estesa quanto la prima, si possono, per tutti i numeri direttamente leggibili sulla medesima, risolvere assai facilmente i due problemi diretto ed inverso che abbiamo risolto colla scala semplice. Sulla scala logaritmica quadrupla, ad es., della fig. 694, in corrispondenza di un numero qualsiasi > 1 e < 10000 si legge immediatamente sulla scala delle parti uguali la metà del suo logaritmo completo: così di fronte al 7100 letto sulla scala logaritmica corrisponde sulla scala delle parti uguali il numero 1.925, cosicchè log. $7100 = 3.850$. Reciprocamente, dato un logaritmo, la cui caratteristica è compresa tra 0 e 4, la nostra scala logaritmica ci dà il numero corrispondente, senza che occorra preoccuparci di calcolarne il numero delle cifre intiere. Si cerchi, ad es., il numero che ha per logaritmo 2.920: basta cercare il numero della scala logaritmica che corrisponde al 1460 letto sulla scala delle parti uguali; questo numero è 830, dunque log. $830 = 2.920$.

Con una scala logaritmica semplice o multipla, si possono, mercè un compasso comune o meglio di riduzione, applicare le proprietà dei logaritmi al calcolo numerico, e quindi semplificare notevolmente il calcolo dei prodotti, quozienti, potenze e radici, riducendo queste operazioni rispettivamente a somme, differenze, prodotti e quozienti. Tali erano le applicazioni delle scale logaritmiche primitive proposte dal Gunter.

Grado di approssimazione con cui si possono eseguire i calcoli sopra di una scala logaritmica. — Ricaviamo da una dottissima memoria dell'ingegnere Castigliano (1) un calcolo che si riferisce all'approssimazione di cui è suscettibile uno strumento a scala logaritmica.

Chiamando a la lunghezza, espressa in metri, di una scala logaritmica semplice, M un numero letto sopra di essa, ed m il numero delle cifre intiere di M, la distanza fra l'origine della scala e la divisione su cui si legge M è data dal prodotto di a per la mantissa di log. M, cioè da:

$$a\,(\log. M - m + 1).$$

ove $m - 1$ rappresenta la caratteristica di log. M.

Riteniamo che nelle letture occorrenti in un prodotto, in un quoziente, od in una quarta proporzionale, si possa commettere un errore compreso fra $^1/_4$ ed $^1/_5$ di mm., cioè tra mm. 0.25 e mm. 0.20, o, per semplicità di calcolo, un errore massimo di mm. $\frac{0.4343}{2}$, ricordando che 0.4343 è il modulo dei logaritmi volgari. Allora, se il risultato esatto di una di queste operazioni deve essere M, eseguendola con uno strumento a scala logaritmica si avrà invece il risultato $M + \delta M$ o $M - \delta M$, essendo questi due numeri tali che la distanza fra i punti della scala che vi corrispondono ed il punto corrispondente al numero M sia minore di mm. $\frac{0.4343}{2}$. Dobbiamo dunque avere:

$$a\,[\log.(M + \delta M) - m + 1] - a\,(\log. M - m + 1) < \text{m.}\ \frac{0.0004343}{2};$$

ed $$a\,(\log. M - m + 1) - a\,[\log.(M - \delta M) - m + 1] < \text{m.}\ \frac{0.0004343}{2}.$$

Ossia $$a \log. \frac{M + \delta M}{M} < \frac{0.0004343}{2};$$

$$a \log. \frac{M}{M - \delta M} < \frac{0.0004343}{2}.$$

Ma $$\log. \frac{M + \delta M}{M} = \log.\left(1 + \frac{\delta M}{M}\right);$$

e

$$\log. \frac{M}{M - \delta M} = \log. \frac{1}{1 - \frac{\delta M}{M}} = -\log\left(1 - \frac{\delta M}{M}\right).$$

Ora il rapporto $\frac{\delta M}{M}$, *l'errore relativo*, è sempre una quantità molto piccola, cosicchè sviluppando in serie $\log.\left(1 + \frac{\delta M}{M}\right)$ e $\log.\left(1 - \frac{\delta M}{M}\right)$, e trascurando le potenze di $\frac{\delta M}{M}$ superiori alla prima, avremo:

$$\log.\left(1 + \frac{\delta M}{M}\right) = 0.4343\,\frac{\delta M}{M};$$

$$\log.\left(1 - \frac{\delta M}{M}\right) = -\,0.4343\,\frac{\delta M}{M}.$$

Si ottiene così la sola disuguaglianza:

$$a\,0.4343\,\frac{\delta M}{M} < \frac{0.0004343}{2},$$

da cui

$$\frac{\delta M}{M} < \frac{1}{2000\,a}.$$

Possiamo dunque concludere che *l'errore relativo massimo è inversamente proporzionale alla lunghezza* a *della scala.*

Se la scala logaritmica semplice fosse di m. 0.10, come sono le scale superiori del regolo logaritmico di m. 0.21 modificato da Mannheim, l'errore massimo possibile sarebbe di:

$$\frac{1}{2000 \times 0.10} = \frac{1}{200}.$$

Se la scala fosse di m. 0.20, come le scale inferiori del regolo stesso, tale errore sarebbe di:

$$\frac{1}{2000 \times 0.20} = \frac{1}{400}.$$

Se, infine, la scala fosse di m. 1, l'errore sarebbe di $\frac{1}{2000}$.

Scorgesi adunque come per ottenere un risultato con qualche approssimazione sia necessario che la scala logaritmica abbia grande lunghezza, il che porterebbe ad ottenere degli strumenti di uso poco pratico. Vedremo in seguito come molti si siano preoccupati della questione, cercando di operare sopra una lunga scala logaritmica disposta in modo da occupare il minimo spazio possibile: così nacquero gli apparecchi a scala logaritmica circolare, e quelli a scala elicoidale. Il problema fu risolto in modo nuovo ed elegante dall'illustre ingegnere Castigliano col suo importantissimo *Aritmografo*, ove la scala logaritmica su cui si opera ha la lunghezza di 1 m.; questa scala è spezzata in parti uguali sovrapposte, e con un compasso speciale od uno scorrevole si opera sulla medesima come sopra una scala rettilinea della lunghezza di 1 m.

(1) *Descrizione ed uso di un nuovo Aritmografo*, A. Castigliano (*L'Ingegneria civile*, ecc., anno 1881, pag. 71).

Regolo Calcolatore di Mannheim

Fig. 1.ª Regolo fisso.

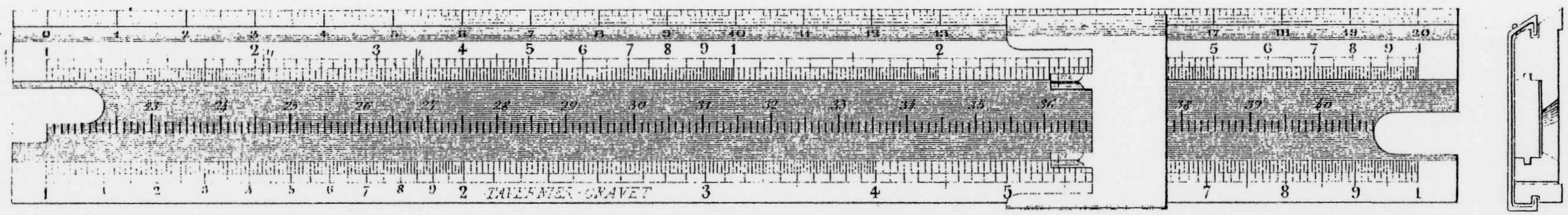


Fig. 2.ª Scorrevole diretto

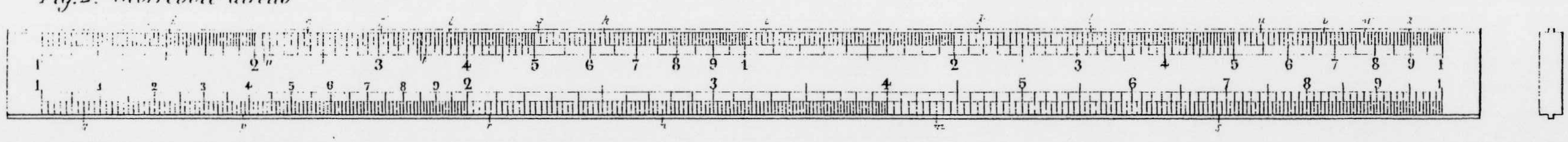


Fig. 3.ª Scorrevole rovesciato diretto

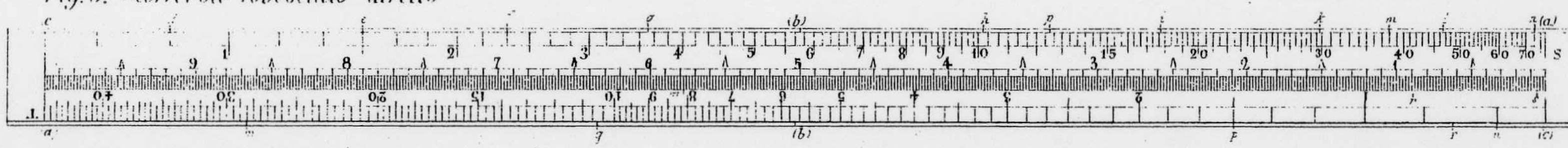
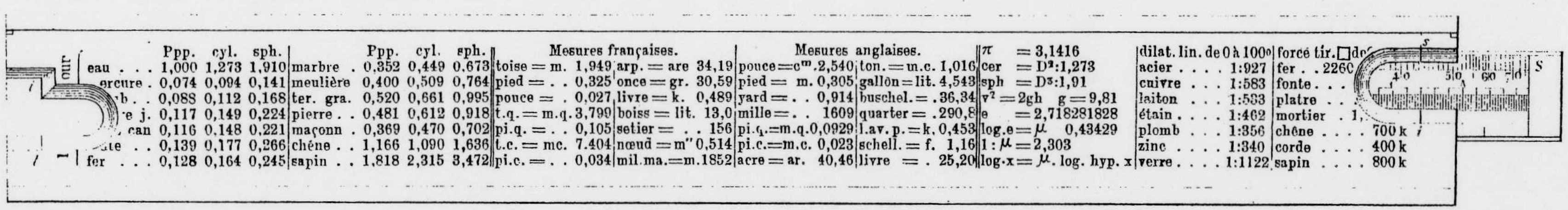


Fig. 4.ª Rovescio del regolo



Regolo calcolatore di Mannheim.

Il regolo logaritmico più diffuso oggidì è quello a scorrevole, modificato da Mannheim. Di questo regolo si trovano in commercio due tipi principali, l'uno della lunghezza di m. 0.21, l'altro della lunghezza di m. 0.26. Le figure e la descrizione che seguono si riferiscono al regolo Mannheim della lunghezza di m. 0.21 costrutto da Tavernier-Gravet di Parigi.

Descrizione del regolo calcolatore. — Lo strumento (Tav. IX) è costituito da due regoli di legno, l'uno dei quali è scorrevole entro una scanalatura praticata nell'altro. Il regolo maggiore (fig. 1 e 4) lo diremo *fisso;* il minore (fig. 2 e 3) *scorrevole.* Questi due regoli portano incise parecchie scale.

Scale metriche del regolo fisso. — Il fianco superiore del regolo fisso (fig. 1) è tagliato obliquamente, e per una lunghezza di m. 0.20 è diviso in centimetri e millimetri. Questa scala, le cui estremità sono separate da uno spazio non diviso di m. 0.005 dalle estremità del regolo, serve come un ordinario doppio decimetro. Il fianco inferiore verticale ed il fondo della scanalatura sono divisi pure in centimetri e millimetri; ma queste divisioni comprendono tutta la lunghezza del regolo, cioè m. 0.21. La divisione del fianco inferiore è graduata da 0 a 21, e quella della scanalatura da 21 a 42. Per queste altre due scale il regolo può servire come una ordinaria misura metrica fino a m. 0.42.

Scale logaritmiche del regolo fisso. — Sulla faccia superiore del regolo fisso e verso i lembi della scanalatura entro cui può muoversi lo scorrevole, sono incise due scale logaritmiche: una *inferiore*, l'altra *superiore;* le estremità di queste due scale cadono sulle stesse rette normali alla lunghezza del regolo (fig. 1).

La *scala inferiore* è una scala logaritmica semplice. Essa è lunga m. 0.20, ed è divisa in 10 parti principali distinte coi numeri 1, 2, 3,..... 9, 1: la divisione 1 di sinistra corrisponde all'origine, la divisione 1 di destra deve intendersi 10 e corrisponde all'estremo della scala. Gli intervalli fra tali divisioni sono divisi in 100 parti fra 1 e 2; in 50 fra 2 e 3, 3 e 4; ed in 20 parti fra i numeri successivi. Le divisioni di questa scala corrispondono dunque ai numeri:

1, 1.01, 1.02, ... 1.99,
2, 2.02, 2.04, ... 3.98,
4, 4.05, 4.10, ... 10.

La *scala superiore* è una scala logaritmica doppia. La sua lunghezza è pure di m. 0.20, e si compone di due scale logaritmiche semplici uguali e consecutive ciascuna della lunghezza di m. 0.10. La distanza fra le divisioni 1 e 2 è divisa in 50 parti; fra 2 e 3, 3 e 4, 4 e 5 in 20 parti; fra le consecutive in 10 parti. Cosicchè le divisioni della scala semplice di sinistra corrispondono ai numeri:

1, 1.02, 1.04, ... 1.98,
2, 2.05, 2.10, ... 4.95,
5, 5.1 , 5.2 , ... 10;

mentre quelle della scala semplice di destra corrispondono ai numeri:

10, 10.2, 10.4, ... 19.8,
20, 20.5, 21.0, ... 49.5,
50, 51, 52, ... 100.

La lettura sarà dunque esatta per ciò che riguarda le due prime, od al più per le tre prime cifre; per le altre non sarà che approssimata.

Le due scale semplici della scala logaritmica superiore, avendo lunghezza metà della scala inferiore, possiamo stabilire che: *la distanza fra due divisioni qualunque di ciascuna delle scale superiori, è uguale alla metà della distanza compresa fra le divisioni omologhe della scala inferiore; ed i logaritmi degli stessi numeri sono rappresentati in questa scala da lunghezze doppie di quelle che li rappresentano in ciascuna delle altre due.*

Scale anteriori del regolo scorrevole. — Il regolo scorrevole porta incise 5 scale: 2 sulla faccia anteriore, 3 sulla faccia posteriore. Tutte queste scale hanno la stessa lunghezza di m. 0.20, e le loro estremità cadono negli stessi piani normali alla lunghezza del regolo.

La faccia anteriore (fig. 2) porta incise ai suoi lembi due scale logaritmiche, una inferiore e l'altra superiore, affatto identiche a quelle del regolo fisso con cui hanno il lembo comune. Le origini delle due scale superiori dei due regoli si possono fare coincidere, ed allora tutte le divisioni delle 4 scale vengono due a due a coincidere.

Allo scopo di porre in corrispondenza le divisioni delle scale semplici inferiori del fisso o dello scorrevole con quelle delle scale superiori, è disposto un cursore metallico (fig. 695) scorrevole a dolce fregamento entro a due piccole scanalature praticate nei fianchi del fisso. Questo cursore porta due indici a piani inclinati, su cui sono segnate due incisioni poste sopra un medesimo piano normale alla lunghezza del regolo.

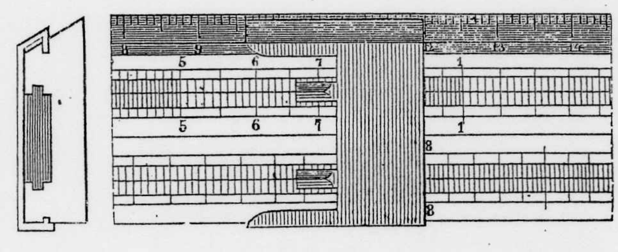


Fig. 695.

Scale posteriori del regolo scorrevole. — Il rovescio dello scorrevole (Tav. IX, fig. 3) porta incise tre scale, una intermedia e due verso i lembi.

La scala intermedia è la *scala delle parti uguali.* Essa è divisa in 500 parti uguali, ognuna delle quali corrisponde perciò a $^2/_{1000}$ della distanza totale: la graduazione 1, 2, 3,..... 9 di questa scala parte da destra. Il regolo fisso presenta alle sue estremità due intaccature (fig. 1 e 4), sulle quali sono incise le traccie *i, i, s, t,* dei piani normali che passano per le estremità delle due scale superiore ed inferiore di questo regolo. Ne consegue che: *se si conduce l'origine dello scorrevole a coincidere con una divisione della scala inferiore del fisso, rovesciando il regolo, l'estremità destra* i *del fisso segna sulla scala delle parti uguali, in millesimi, la mantissa del logaritmo del numero corrispondente a tale divisione.*

La scala inferiore sul rovescio dello scorrevole è la *scala delle tangenti.* Essa porta 45 divisioni principali, sulle quali stanno o devono intendersi scritti i numeri 1, 2, 3, ... 45, crescenti da destra verso sinistra, che corrispondono rispettivamente agli angoli di 1°, 2°, 3°, ... 45°. Le divisioni intermedie procedono di 10′ in 10′ da 40′ (la prima divisione dopo l'origine) fino a 10°; di 20′ in 20′ fino a 20°; e poscia di 30′ in 30′ fino all'estremo della scala. La posizione dei punti di questa scala che corrispondono ad angoli intermedii a quelli che sono direttamente indicati dalle divisioni, si stimeranno ad occhio in modo analogo a quanto si disse per la scala logaritmica.

Nella scala delle tangenti la distanza fra l'origine e la divisione corrispondente ad un dato angolo è uguale alla lunghezza della metà della scala superiore del fisso (m. 0.10) moltiplicata per il logaritmo della tangente dell'angolo stesso nella circonferenza di raggio 100. L'origine della scala deve corrispondere all'arco la cui tangente ha per logaritmo zero: questa tangente, che è 1, corrisponde all'angolo di 34′ circa. L'estremità della scala corrisponde all'angolo di 45°, la cui tangente, uguale al raggio 100, ha per logaritmo 2: questo logaritmo è rappresentato graficamente dalla lunghezza totale della scala, m. 0.20. Estratto quindi lo scorrevole e fattolo rientrare nella scanalatura in modo che la scala delle tangenti sia in contatto colla scala superiore del fisso e colle origini coincidenti, in corrispondenza dei tratti 1, 2, 3, ... 45, della prima si leggeranno le tangenti di questi angoli nella circonferenza di raggio 100. Supponendo poi che la divisione 1 di sinistra della scala superiore del fisso corrisponda al numero 0.01, la divisione 1 intermedia al numero 0.1, e la divisione 1 di destra al numero 1, si avranno le tangenti nella circonferenza di raggio 1. I problemi di trovare la tangente di un angolo dato, e reciprocamente, si possono pure risolvere lasciando lo scorrevole nella sua posizione ordinaria, capovolgendo il regolo, e leggendo sulla scala delle tangenti coll'indice *t* dell'intaccatura di sinistra (fig. 4).

La scala superiore sul rovescio dello scorrevole è la *scala dei seni* (fig. 3). Essa porta 90 divisioni principali corrispondenti agli angoli 1°, 2°, 3°, ... 90°; la graduazione di questa scala è crescente da sinistra verso destra. Le divisioni intermedie procedono di 10′ in 10′ da 40′ fino a 10°; di 20′ in 20′ fino a 20°; di 30′ in 30′ fino a 30°; poscia di 1° in 1° fino a 60°, di 2° in 2° fino a 70°, e si hanno per ultimo le divisioni 75°, 80° e 90°.

Nella scala dei seni la distanza fra l'origine e la divisione corrispondente ad un dato angolo è uguale alla metà della lunghezza della scala superiore del fisso (m. 0.10) moltiplicata per il logaritmo del seno dell'angolo stesso nella circonferenza di raggio 100. L'origine corrisponde naturalmente all'arco il cui seno ha per logaritmo zero: questo seno, uguale all'unità, cioè alla centesima parte del raggio, è dato dall'arco di 34′ circa. L'estremo della scala corrisponde all'arco di 90°, il cui seno, uguale al raggio 100, ha per logaritmo 2, rappresentato, come nella scala delle tangenti, dalla lunghezza totale di m. 0.20. Se si dispone adunque la scala dei seni contro alla scala superiore del fisso e colle origini coincidenti, si leggeranno sulla scala del fisso, in corrispondenza delle divisioni 1, 2, 3, ... 90 della scala dei seni, i seni degli angoli di 1°, 2°, 3°, ... 90° nella circonferenza di raggio 100. Se le divisioni 1 della scala superiore del regolo fisso si intende che corrispondano rispettivamente ai numeri 0.01, 0.1, 1, cominciando da sinistra, si ottengono i seni nella circonferenza di raggio 1. Il seno di un angolo dato si può pure ottenere lasciando lo scorrevole nella sua posizione normale, capovolgendo il regolo, e leggendo l'angolo dato sulla scala dei seni coll'indice *s* dell'intaccatura di destra (fig. 4).

Lo scorrevole può essere disposto in diverse maniere rispetto al fisso. Diremo *scorrevole diretto* la sua posizione ordinaria, quando cioè la sua faccia anteriore è disposta superiormente, nello stesso piano delle scale del fisso, colle origini a sinistra. Diremo *scorrevole inverso* quando le origini sono a destra. Diremo *scorrevole rovesciato diretto od inverso* quando invece è la sua faccia posteriore che trovasi al disopra, come si è già detto parlando delle scale dei seni e delle tangenti: *diretto* quando le divisioni della scala dei seni vanno in senso uguale a quello delle scale del fisso; *inverso* nel caso contrario.

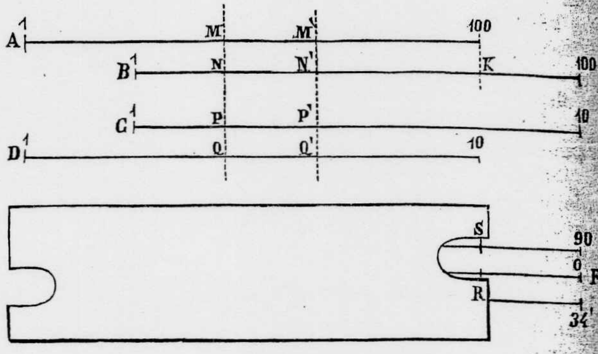


Fig. 696.

Teoria del regolo. — *Scorrevole diretto. Caso dei numeri leggibili direttamente sul regolo.* — Si apra lo scorrevole in una posizione qualsiasi (fig. 696), e siano M, N, P, Q; M′, N′, P′, Q′, i numeri corrispondenti alle divisioni delle quattro scale che trovansi sopra due rette qualsiasi condotte normalmente alla lunghezza del regolo; sia poi R il numero che si legge sulla scala delle parti uguali coll'indice dell'intaccatura di destra. La figura dà immediatamente;

$$AM - BN = AM' - BN' = AM - CP = AM' - \\ - CP' = DQ - BN = DQ' - BN' = DQ - \\ - CP = DQ' - CP' = FR.$$

Ma dicendo a la lunghezza della metà della scala superiore del fisso, si ha:

$AM = a \log. M$; $\quad AM' = a \log. M'$;
$BN = a \log. N$; $\quad BN' = a \log. N'$;
$CP = 2a \log. P = a \log. P^2$; $\quad CP' = 2a \log. P' = a \log. P'^2$;
$DQ = 2a \log. Q = a \log. Q^2$; $\quad DQ' = 2a \log. Q' = a \log. Q'^2$;

$$FR = \frac{R}{1000} 2a.$$

Sostituendo e passando dai logaritmi ai numeri, otteniamo:

$$\frac{M}{N} = \frac{M'}{N'} = \frac{M}{P^2} = \frac{M'}{P'^2} = \frac{Q^2}{N} = \frac{Q'^2}{N'} = \frac{Q^2}{P^2} = \frac{Q'^2}{P'^2} = 10^{\frac{2R}{1000}}.$$

Diciamo K la divisione della scala superiore dello scorrevole che corrisponde all'estremo 100 del fisso, ed S l'angolo che si legge sulla scala dei seni coll'indice dell'intaccatura di destra; allora si ha:

$$\frac{K}{100} = \text{sen.}\, S;$$

da cui: $$\frac{100}{K} = \frac{1}{\text{sen.}\, S} = \frac{M}{N};$$

cosicchè abbiamo l'equazione generale:

$$\frac{M}{N} = \frac{M'}{N'} = \frac{M}{P^2} = \frac{M'}{P'^2} = \frac{Q^2}{N} = \frac{Q'^2}{N'} = \frac{Q^2}{P^2} = \frac{Q'^2}{P'^2} = 10^{\frac{2R}{1000}} = \frac{1}{\text{sen.}\, S}.$$

Scorrevole diretto. Caso di numeri qualsiasi. — L'equazione generale precedente può estendersi anche

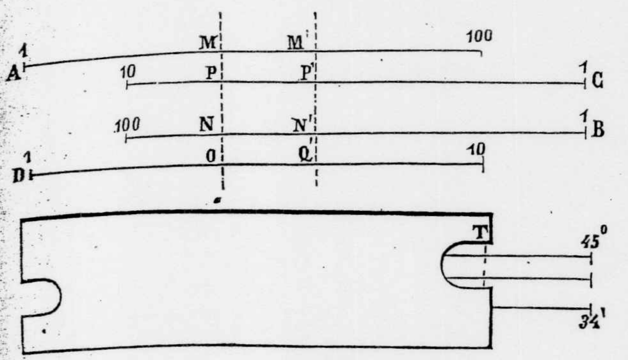


Fig. 697.

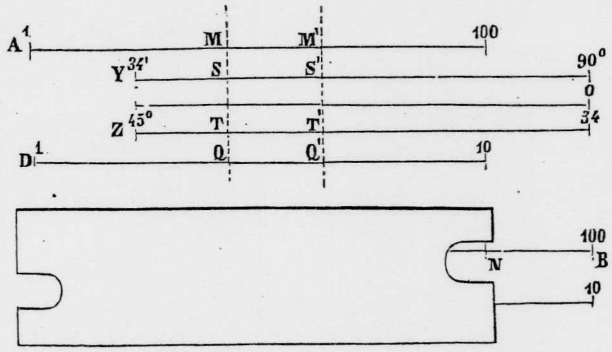


Fig. 698.

al caso in cui si tratta di numeri non direttamente leggibili sul regolo, purchè si tenga calcolo del numero delle loro cifre intiere.

Come si è già detto, un numero qualunque che non sia compreso fra 0 e 10 o fra 0 e 100 si può ridurre entro questi limiti, senza alterarne la parte significativa, dividendolo per una potenza conveniente di 10, cioè trasportandone la virgola. Sia m il numero, positivo o negativo, delle cifre intiere di un numero qualsiasi M; dividendo M per 10^{m-1} o per 10^{m-2} si ottiene un numero compreso fra 0 e 10 o fra 0 e 100. Nel primo caso M è ridotto ad essere leggibile direttamente sulle scale inferiori e sulla prima metà delle scale superiori del regolo; nel secondo caso M si potrà leggere direttamente sulla seconda metà delle scale superiori. A fine di comprendere i due casi in un solo, supporremo che allorquando M si legge nella seconda metà delle scale superiori, m rappresenti il numero delle sue cifre intiere *diminuito di uno.*

Ciò posto, ponendo nell'equazione generale prima stabilita, invece dei numeri M, M', N, N', ..., le espressioni

$$\frac{M}{10^{m-1}},\ \frac{M'}{10^{m'-1}},\ \frac{N}{10^{n-1}},\ \frac{N'}{10^{n'-1}},\ \ldots\ldots,$$

che rappresentano i numeri precedenti ridotti in modo da essere direttamente leggibili sulle scale del regolo, si ottiene:

$$\frac{M}{N}\cdot\frac{1}{10^{m-n}}=\frac{M'}{N'}\,\frac{1}{10^{m'-n'}}=\frac{M}{P^2}\,\frac{1}{10^{m-2p+1}}=$$
$$=\frac{M'}{P'^2}\,\frac{1}{10^{m'-2p'+1}}=\frac{Q^2}{N}\cdot\frac{1}{10^{2q-n-1}}=\frac{Q'^2}{N'}\,\frac{1}{10^{2q'-n'-1}}=$$
$$=\frac{Q^2}{P^2}\,\frac{1}{10^{2q-2p}}=\frac{Q'^2}{P'^2}\,\frac{1}{10^{2q'-2p'}}=10^{\frac{2R}{1000}}=\frac{1}{\text{sen.}\,S}.$$

Supponendo in questa equazione:

$$m-n=m'-n'=m-2p+1=m'-2p'+1=2q-n-1=2q'-n'-1=2q-2p=2q'-2p';\ \ldots(1')$$

si ha:

$$\frac{M}{N}=\frac{M'}{N'}=\frac{M}{P^2}=\frac{M'}{P'^2}=\frac{Q^2}{N}=\frac{Q'^2}{N'}=$$
$$=\frac{Q^2}{P^2}=\frac{Q'^2}{P'^2}=10^{\frac{2R}{1000}+m-n}=\frac{10^{m-n}}{\text{sen.}\,S}\ \ldots..\ (1)$$

Scorrevole inverso. Caso dei numeri leggibili direttamente sul regolo. — Aperto lo scorrevole in una posizione qualunque (fig. 697), e ritenute le stesse denominazioni precedenti, si ha dalla figura:

$$AM+BN=AM'+BN'=AM+CP=AM'+CP'=$$
$$=DQ+BN=DQ'+BN'=DQ+CP=DQ'+CP';$$

da cui:

$$MN=M'N'=MP^2=M'P'^2=Q^2N=Q'^2N'=Q^2P^2=Q'^2P'^2.$$

Dicendo T l'angolo che si legge sulla scala delle tangenti coll'indice dell'intaccatura di destra, è chiaro che:

$$AM+BN=2a+2a-a\log.100\,\text{tang.}\,T;$$

e quindi:
$$MN=\frac{100}{\text{tang.}\,T}.$$

Scorrevole inverso. Caso di numeri qualsiasi. — Indichiamo, come prima, con m, m', n, n', ... i numeri delle cifre intiere di M, M', N, N', ..., ovvero tali numeri diminuiti di un'unità, secondochè si leggono nella prima o nella seconda metà delle rispettive scale. Allora ponendo nell'equazione generale precedente in luogo di M, M', N, N', ... le espressioni

$$\frac{M}{10^{m-1}},\ \frac{M'}{10^{m'-1}},\ \frac{N}{10^{n-1}},\ \frac{N}{10^{n'-1}},\ \ldots\ldots,$$

si ottiene:

$$MN=M'N'=MP^2=M'P'^2=Q^2N=Q'^2N'=$$
$$=Q^2P^2=Q'^2P'^2=\frac{10^{m+n}}{\text{tang.}\,T}\ \ldots..\ (2)$$

purchè si abbia simultaneamente:

$$m+n=m'+n'=m+2p-1=m'+2p'-1=$$
$$n+2q-1=n'+2q'-1=2p+2q-2=2p'+2q'-2\quad(2')$$

Scorrevole rovesciato diretto. — Aperto lo scorrevole in una posizione qualunque (fig. 698) si hanno le eguaglianze:

$$AM-YS=AM'-YS'=DQ-ZT=DQ'-ZT'=BN.$$

Ma:

$AM=a\log.M$; $AM'=a\log.M'$;
$YS=a\log.100\,\text{sen.}\,S$; $YS'=a\log.100\,\text{sen.}\,S'$;
$DQ=2a\log.Q=a\log.Q^2$; $DQ'=2a\log.Q'=a\log.Q'^2$;
$ZT=2a-a\log.100\,\text{tang.}T$; $ZT'=2a-a\log.100\,\text{tang.}T'$;

$$BN=2a-a\log.N.$$

Sostituendo e passando dai logaritmi ai numeri abbiamo:

$$\frac{M}{100\,\text{sen.}\,S}=\frac{M'}{100\,\text{sen.}\,S'}=Q^2\,\text{tang.}\,T=Q'^2\,\text{tang.}\,T'=\frac{100}{N};$$

la quale è applicabile per i numeri direttamente leggibili sul regolo.

Per numeri qualunque basta sostituire ad M, M', Q, Q', N le espressioni:

$$\frac{M}{10^{m-1}},\ \frac{M'}{10^{m'-1}},\ \frac{Q}{10^{q-1}},\ \frac{Q'}{10^{q'-1}},\ \frac{N}{10^{n-1}};$$

allora l'equazione diventa:

$$\frac{\mathrm{M}}{\text{sen.}\,\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{M}'}{\text{sen.}\,\mathrm{S}'} = \mathrm{Q}^2 \,\text{tang.}\,\mathrm{T} = \mathrm{Q}'^2 \,\text{tang.}\,\mathrm{T}' = \frac{1}{\mathrm{N}}; \quad (3)$$

purchè si abbia:

$$m+1 = m'+1 = 2q-2 = 2q'-2 = -(n+1). \quad (3')$$

Scorrevole rovesciato inverso. — Aperto lo scorrevole in una posizione qualunque (fig. 699) hanno luogo le eguaglianze:

$$\mathrm{AM} - \mathrm{ZT} = \mathrm{AM}' - \mathrm{ZT}' = \mathrm{DQ} - \mathrm{YS} = \mathrm{DQ}' - \mathrm{YS}'$$

Ma:

$\mathrm{AM} = a \log.\mathrm{M}$; $\quad \mathrm{AM}' = a \log.\mathrm{M}'$;
$\mathrm{ZT} = a \log.100\,\text{tang.}\,\mathrm{T}$; $\quad \mathrm{ZT}' = a \log.100\,\text{tang.}\,\mathrm{T}'$;
$\mathrm{DQ} = a \log.\mathrm{Q}^2$; $\quad \mathrm{DQ}' = a \log.\mathrm{Q}'^2$;
$\mathrm{YS} = 2a - a \log.100\,\text{sen.}\,\mathrm{S}$; $\quad \mathrm{YS}' = 2a - a \log.100\,\text{sen.}\,\mathrm{S}'$.

Cosicchè:

$$\frac{\mathrm{M}}{100\,\text{tang.}\,\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{M}'}{100\,\text{tang.}\,\mathrm{T}'}, = \mathrm{Q}^2 \,\text{sen.}\,\mathrm{S} = \mathrm{Q}'^2 \,\text{sen.}\,\mathrm{S}'.$$

E per numeri qualunque:

$$\frac{\mathrm{M}}{\text{tang.}\,\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{M}'}{\text{tang.}\,\mathrm{T}'} = \mathrm{Q}^2 \,\text{sen.}\,\mathrm{S} = \mathrm{Q}'^2 \,\text{sen.}\,\mathrm{S}'; \quad (4)$$

purchè:

$$m+1 = m'+1 = 2q-2 = 2q'-2 \; \ldots\ldots \; (4')$$

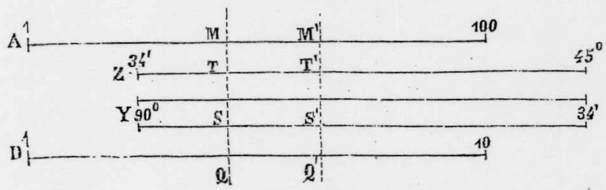


Fig. 699.

Pratica del regolo. — Le equazioni generali (1), (1'), (2), (2'), (3), (3'), (4), (4'), testè ricavate, permettono di stabilire immediatamente le operazioni fattibili in una sola posizione dello scorrevole, non che il procedimento da seguirsi nei singoli casi.

Dall'equazione (1) si deduce ad esempio:

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{M}'\mathrm{N}}{\mathrm{N}'}$$

cosicchè in una sola posizione dello scorrevole diretto si può ottenere il quarto termine della proporzione:

$$\mathrm{N}' : \mathrm{M}' = \mathrm{N} : \mathrm{M}.$$

Il numero delle cifre intere di M si ricava dall'equazione (1'), poichè essa ci dà:

$$m = m' + n - n';$$

la quale dice che, se tutti i quattro termini della proporzione da risolversi si leggono sulle prime metà delle rispettive scale logaritmiche, il numero delle cifre intere dell'estremo incognito è uguale alla differenza fra la somma dei numeri di cifre dei medii ed il numero di cifre dell'estremo noto.

(1) Più esattamente si deve dire: *si legge la parte significativa del prodotto cercato.* Questa stessa osservazione vale in generale, e tuttavolta noi diremo per brevità: *sulla scala logaritmica si legge il numero* X, o A, o B, ..., devesi intendere: *sulla scala logaritmica si legge la parte significativa del numero* X, o A, o B, ...

Supponendo $\mathrm{N}'=1$ si ottiene dalle precedenti equazioni:

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}'\,\mathrm{N};$$
$$m = m' + n - 1.$$

le quali determinano completamente la via da seguirsi per ottenere il prodotto di due numeri.

Per ottenere tutte le operazioni eseguibili in una sola posizione dello scorrevole, non si avrebbe quindi che a combinare in tutti i modi possibili i termini delle citate equazioni generali. Noi ci limiteremo a riassumere in breve le principali regole da seguirsi nell'applicazione del regolo calcolatore ai varii calcoli semplici.

In tutte queste regole indicheremo sempre con x, a, b, c, ... i numeri delle cifre intere di X, A, B, C, ...; le lettere x, a, b, c, ... non sono quindi da confondersi colle lettere m, m', n, n', ... delle equazioni generali, le quali, come si è stabilito, rappresentano talvolta i numeri delle cifre intere di M, M', N, N',..... e talvolta tali numeri diminuiti di uno.

I. *Moltiplicazione* $\mathrm{X} = \mathrm{AB}$.

La moltiplicazione si può eseguire sia impiegando le scale logaritmiche semplici inferiori del fisso e dello scorrevole, sia impiegando le scale logaritmiche doppie superiori. Non occorre ripetere che colle scale inferiori si ha il prodotto con maggiore approssimazione.

1° *Uso delle scale inferiori* (*Scorrevole diretto*). *Estratto lo scorrevole a destra, se ne porta l'origine sopra uno dei fattori letto* ***sul fisso***; ***sul fisso stesso***, *ed in corrispondenza dell'altro fattore letto* ***sullo scorrevole***, *si legge il prodotto cercato* (1). *Se impiegando l'origine dello scorrevole non fosse possibile di leggere il prodotto sul regolo, si estrae lo scorrevole a sinistra e se ne impiega l'estremo.*

$x = a + b - 1$ *se il prodotto si ottiene impiegando l'origine dello scorrevole;*
$x = a + b$ *se il prodotto si ottiene impiegando l'estremo dello scorrevole.*

Esempi:

$\mathrm{X} = 13200 \times 332 = 4380000 \quad (x = 5 + 3 - 1 = 7)$;
$\mathrm{X} = 0.00382 \times 781 = 2.98 \quad (x = -2 + 3 = 1)$.

2° *Uso delle scale superiori* (*Scorrevole diretto*). *Estratto lo scorrevole a destra, se ne porta l'origine sotto uno dei fattori letto nella prima metà del fisso; sul fisso stesso, ed in corrispondenza dell'altro fattore letto sulla prima metà dello scorrevole, si legge il prodotto.*

$x = a + b - 1$ *se il prodotto si legge sulla prima metà della scala superiore del fisso;*
$x = a + b$ *se il prodotto si legge sulla seconda metà della scala superiore del fisso.*

Esempi:

$\mathrm{X} = 1.32 \times 332 = 438, \quad (x = 1 + 3 - 1 = 3)$;
$\mathrm{X} = 0.0382 \times 781 = 29.8, \quad (x = -1 + 3 = 2)$.

Nei due procedimenti esposti è chiaro che se la parte significativa di uno dei fattori non cambia, la posizione dello scorrevole è sempre la stessa; cosicchè *una sola posizione dello scorrevole permette di ottenere tutti i prodotti che si hanno moltiplicando uno stesso fattore per una serie di numeri diversi.*

3° *Moltiplicazione a prodotto costante* (*Scorrevole inverso*).

Disposto il cursore sopra uno dei fattori letto sulla prima metà della scala superiore del fisso, si estrae lo scorrevole finchè l'altro fattore letto sulla prima metà della sua scala superiore (ora inferiore) cada sul primo. Sul fisso, ed in corrispondenza dell'origine dello scorrevole, si legge il prodotto.

$x=a+b-1$ *se il prodotto si legge sulla prima metà della scala superiore del fisso;*

$x=a+b$ *se il prodotto si legge sulla seconda metà della scala superiore del fisso.*

Applicando questo procedimento lo scorrevole non si muove se si ricercano i fattori che moltiplicati fra di loro diano lo stesso prodotto.

II. *Divisione.* $X=\frac{A}{B}$.

Anche la divisione può eseguirsi o colle scale inferiori oppure colle scale superiori.

1° *Uso delle scale inferiori* (*Scorrevole diretto*).

Si estrae lo scorrevole finchè il divisore letto sulla sua scala inferiore cada sul dividendo letto sul fisso; sul fisso stesso, ed in corrispondenza di una delle estremità dello scorrevole, si legge il quoziente.

$x=a-b+1$ *se il quoziente si legge coll'origine dello scorrevole;*

$x=a-b$ *se il quoziente si legge coll'estremo dello scorrevole.*

Esempi:

$$X=\frac{327}{0.000132}=2480000, \qquad (x=3-(-3)+1=7);$$

$$X=\frac{4970}{627}=7.92, \qquad (x=4-3=1).$$

2° *Uso delle scale superiori.*

Divisione a quoziente costante (*Scorrevole diretto*).

Si estrae lo scorrevole finchè il divisore letto sulla prima metà della sua scala cada sul dividendo letto sulla seconda metà del fisso; sul fisso stesso, ed in corrispondenza all'origine dello scorrevole, si legge il quoziente.

$x=a-b+1$ *se il quoziente cade nella seconda metà della scala superiore del fisso;*

$x=a-b$ *se il quoziente cade nella prima metà della scala superiore del fisso.*

Esempi:

$$X=\frac{3.27}{0.132}=24.8, \qquad (x=1-0+1=2);$$

$$X=\frac{49.70}{627}=0.0792, \qquad (x=2-3=-1).$$

Egli è chiaro che col procedimento indicato in una stessa posizione dello scorrevole, presi due numeri qualunque corrispondenti sulle due scale superiori del fisso e dello scorrevole, e tenuto conto della virgola, il loro rapporto è sempre il numero che si legge coll'origine dello scorrevole. *Dunque tutte le frazioni che hanno per numeratore un numero letto sulla scala superiore del fisso, e per denominatore il corrispondente numero della scala superiore dello scorrevole, sono prossimamente uguali.* Tale procedimento si potrà quindi applicare convenientemente alla riduzione di una frazione a minimi termini, od alla ricerca di frazioni più semplici pressochè equivalenti ad una frazione data.

3° *Quoziente a divisore costante* (*Scorrevole diretto*).

Si estrae lo scorrevole finchè la sua origine cada sotto al divisore letto sulla prima metà della scala superiore del fisso; sullo scorrevole, in corrispondenza del dividendo letto sul regolo fisso, si legge il quoziente.

$x=a-b+1$ *se il dividendo si può leggere sulla prima metà della scala superiore del fisso;*

$x=a-b$ *se il dividendo si deve leggere sulla seconda metà della scala superiore del fisso.*

Esempi:

$$X=\frac{32700}{132}=248, \qquad (x=5-3+1=3);$$

$$X=\frac{0.497}{62700}=0.00000792, \qquad (x=0-5=-5).$$

Eseguendo la divisione con questo procedimento, non si dovrà spostare lo scorrevole se il divisore rimane costante; esso perciò è utile per la ricerca dei quozienti in cui il divisore rimane costante.

4° *Quoziente a dividendo costante* (*Scorrevole inverso*).

Si estrae lo scorrevole a sinistra finchè la sua origine cada sotto al dividendo letto nella seconda metà della scala superiore del fisso; sulla scala stessa, in corrispondenza del divisore letto sulla prima metà della scala superiore (ora inferiore) dello scorrevole, si legge il quoziente. La lettura si farà valendosi del cursore.

$x=a-b+1$ *se il quoziente cade nella seconda metà della scala superiore del fisso;*

$x=a-b$ *se il quoziente cade nella prima metà della scala superiore del fisso.*

Esempi:

$$X=\frac{0.00327}{0.132}=0.0248, \qquad (x=-2-0+1=-1);$$

$$X=\frac{4.97}{6.27}=0.792, \qquad (x=1-1=0).$$

Eseguendo la divisione con questo procedimento, non si dovrà spostare lo scorrevole se il dividendo rimane costante.

III. *Proporzioni* $X=\frac{AB}{C}$.

1° *Proporzioni in cui un medio ed un estremo rimangono costanti* (*Scorrevole diretto*).

Si estrae lo scorrevole finchè l'estremo cognito C letto sulla prima metà della sua scala superiore, coincida con uno dei medii A o B, letto sulla prima metà della scala superiore del fisso; sopra questa, in corrispondenza all'altro medio letto sullo scorrevole, si trova l'estremo incognito X.

$x=a+b-c$ *se i quattro termini della proporzione cadono tutti nelle prime metà delle rispettive scale;*

$x=a+b-c+1$ *se un solo estremo cade nella seconda metà della scala;*

$x=a+b-c-1$ *se un solo medio cade nella seconda metà della scala.*

Esempi:

$$X=\frac{370\times 28.5}{422}=24.9, \qquad (x=3+2-3=2);$$

$$X=\frac{0.895\times 763}{1.75}=390, \qquad (x=0+3-1+1=3);$$

$$X=\frac{0.0325\times 0.00112}{756}=0.0000000481, \qquad (x=-1-2-3-1=-7).$$

Eseguendo il calcolo con questo procedimento, se un medio ed un estremo rimangono costanti, la posizione dello scorrevole non cambia.

2° *Proporzioni in cui i medii rimangono costanti* (*Scorrevole inverso*).

Si porta il cursore sopra uno dei medii, A *o* B, *letto sulla prima metà del fisso, e si estrae lo scorrevole finchè l'altro medio letto sulla prima metà della sua scala superiore (ora inferiore) venga a coincidere col primo. In corrispondenza dell'estremo noto* C *letto sopra una di tali scale si legge sull'altra l'estremo cercato* X. *Se, leggendo il secondo medio sulla prima metà dello scorrevole, non fosse possibile di ottenere il risultato sul regolo, si legge questo medio sulla seconda metà.*

La regola delle cifre è identica alla precedente.

Esempi:

$$X = \frac{3.70 \times 285}{422} = 2.49, \quad (x = 1 + 3 - 3 = 1);$$

$$X = \frac{895 \times 76.3}{175} = 390, \quad (x = 3 + 2 - 3 + 1 = 3);$$

$$X = \frac{325 \times 112}{756} = 48.1, \quad (x = 3 + 3 - 3 - 1 = 2).$$

In questo caso la posizione dello scorrevole non cambia se i medii della proporzione rimangono costanti.

IV. *Seconda potenza* $X = A^2$.

(*Scorrevole diretto*). *Ad ogni numero letto sulla scala inferiore del fisso corrisponde sulla scala superiore del fisso stesso il suo quadrato. La lettura si farà coll'origine dello scorrevole, o, meglio, col cursore.*

$x = 2a - 1$ *se il quadrato cade nella prima metà della scala superiore;*

$x = 2a$ *se il quadrato cade nella seconda metà della scala superiore.*

Esempi:

$$X = (2.25)^2 = 5.06, \quad (x = 2 \times 1 - 1 = 1);$$

$$X = 782^2 = 611000, \quad (x = 2 \times 3 = 6).$$

V. *Radice quadrata*

$$X = \sqrt{A}.$$

(*Scorrevole diretto*). *Ad ogni numero letto sulla scala superiore del fisso, nella prima o nella seconda metà secondochè esso ha un numero impari o pari di cifre intere, corrisponde sulla scala inferiore del fisso stesso la sua radice quadrata.*

$x = \frac{a+1}{2}$ *se a è impari;*

$x = \frac{a}{2}$ *se a è pari.*

Esempi:

$$X = \sqrt{342} = 18.5, \quad \left(x = \frac{3+1}{2} = 2\right);$$

$$X = \sqrt{0.00342} = 0.0585 \quad \left(x = \frac{-2}{2} = -1\right).$$

VI. *Terza potenza* $X = A^3$.

1° (*Scorrevole diretto*). *Si estrae lo scorrevole portandone l'origine sul numero proposto letto sulla scala inferiore del fisso, ed in corrispondenza allo stesso numero letto sulla scala superiore dello scorrevole si legge sulla scala superiore del fisso il cubo cercato. Se, impiegando l'origine dello scorrevole, non fosse possibile di leggere il risultato sul regolo, se ne impiega l'estremo.*

$x = 3a - 2$ *se, usando l'origine dello scorrevole, il cubo si legge nella prima metà della scala superiore del fisso;*

$x = 3a - 1$ *se, usando l'origine dello scorrevole, il cubo si legge nella seconda metà della scala superiore del fisso;*

$x = 3a$ *se è necessario usare l'estremo dello scorrevole.*

Esempi:

$$X = (1.75)^3 = 5.36, \quad (x = 3 - 2 = 1);$$

$$X = (0.0385)^3 = 0.0000571, \quad (x = 3 \times (-1) - 1 = -4);$$

$$X = (0.000841)^3 = 0.000000000593 \quad (x = 3 \times (-3) = -9).$$

2° (*Scorrevole inverso*). *Si estrae lo scorrevole, finchè il numero proposto letto sulla prima metà della sua scala superiore (ora inferiore) coincida collo stesso numero letto sulla scala inferiore del fisso. L'origine o l'estremo dello scorrevole indicano sulla scala superiore del fisso il cubo cercato.*

La regola delle cifre è identica alla precedente.

Esempi:

$$X = (17.5)^3 = 5360, \quad (x = 3 \times 2 - 2 = 4);$$

$$X = (3.85)^3 = 57.1, \quad (x = 3 - 1 = 2);$$

$$X = (0.0841)^3 = 0.000593 \quad (x = 3 \times (-1) = -3).$$

VII. *Radice cubica*

$$X = \sqrt[3]{A}.$$

(*Scorrevole inverso*). *Si estrae lo scorrevole, portando la sua origine a coincidere col numero proposto letto nella prima o nella seconda metà del fisso, secondochè il numero delle sue cifre intiere diventa un multiplo di 3 coll'aggiunta di 2 ovvero di 1. Si cercano poi sulla prima metà della scala superiore (ora inferiore) dello scorrevole e sulla scala inferiore del fisso le divisioni che corrispondono ad un medesimo numero. Questo numero è la radice cercata. Se il numero delle cifre intiere del numero proposto è un multiplo di 3, si porta l'estremo dello scorrevole a coincidere con questo numero letto nella prima metà del fisso.*

$x = \frac{a+2}{3}$ *se occorre aggiungere 2 ad a per avere un multiplo di 3;*

$x = \frac{a+1}{3}$ *se occorre aggiungere 1 ad a per avere un multiplo di 3;*

$x = \frac{a}{3}$ *se a è un multiplo di 3.*

Esempi:

$$X = \sqrt[3]{5360} = 17.5, \quad \left(x = \frac{4+2}{3} = 2\right);$$

$$X = \sqrt[3]{57.1} = 3.85, \quad \left(x = \frac{2+1}{3} = 1\right);$$

$$X = \sqrt{0.000593} = 0.0841, \quad \left(x = \frac{-3}{3} = -1\right).$$

VIII. *Potenze e radici di ordine qualsiasi.*

$$X = A^m \qquad X = \sqrt[m]{A}.$$

(*Scorrevole diretto*). *Se m è intiero si conduce l'origine dello scorrevole sotto il numero proposto* A *letto nella prima metà della scala superiore del fisso. Sopra* A *dello scorrevole si legge sul fisso* A^2*; sopra* A^2 *dello scorrevole si legge sul fisso* A^3*; e così di seguito finchè si proviene alla potenza cercata di* A *passando per tutte le intermedie.* Le scale superiori dello fisso e dello scorrevole sono disposte a questo modo:

$$\begin{array}{llllll} 1 & A & A^2 & A^3 & \ldots\ldots & 100 \\ & 1 & A & A^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 100. \end{array}$$

Si può ridurre a metà il numero delle potenze intermedie, portando l'origine dello scorrevole sul numero A letto sulla scala inferiore. Se m è pari si leggeranno sullo scorrevole le successive potenze pari somministrate dalla scala superiore:

$$\begin{array}{lllll} 1 & A^2 & A^4 & A^6 \ldots\ldots & 100 \\ & 1 & A^2 & A^4 \ldots\ldots\ldots\ldots & 100 \\ 1 & A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & 10. \end{array}$$

Se m è impari si leggeranno invece sullo scorrevole le successive potenze impari:

$$\begin{array}{lllll} 1 & A^3 & A^5 & A^7 \ldots\ldots & 100 \\ & 1\ A & A^3 & A^5 \ldots\ldots\ldots\ldots & 100 \\ 1 & A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & 10. \end{array}$$

Allo stesso modo, se si legge A sulla scala superiore del fisso, e poscia desunto $\sqrt{A}$ dalla scala inferiore, si legge questo sulla scala superiore dello scorrevole, gli si troverà di fronte sulla scala superiore del fisso $A\sqrt{A} = \sqrt{A^3}$. Letto di nuovo $\sqrt{A^3}$ sullo scorrevole gli si troverà di fronte $A\sqrt{A^3} = \sqrt{A^5}$; e così di seguito, come indica il seguente quadro:

$$\begin{array}{llllll} 1 & A & \sqrt{A^3} & \sqrt{A^5} & \ldots\ldots & 100 \\ & 1 & \sqrt{A} & \sqrt{A^3} & \ldots\ldots\ldots\ldots & 100 \\ 1 & \sqrt{A} & \sqrt[4]{A^3} & \sqrt[4]{A^5} & \ldots\ldots & 10. \end{array}$$

Impiegando il cursore si possono leggere sulla scala inferiore del fisso i numeri che corrispondono a $\sqrt{A^3}$, $\sqrt{A^5}$, ecc., della sua scala superiore: questi numeri sono rispettivamente $\sqrt[4]{A^3}$, $\sqrt[4]{A^5}$, ecc.

Si possono così ottenere con una sola posizione dello scorrevole le successive radici quadrate e quarte delle varie potenze di un dato numero.

In generale però trattandosi di potenze o radici di ordine elevato o frazionario converrà applicare, valendosi sempre del regolo, il calcolo logaritmico.

Ci siamo occupati del modo di eseguire i calcoli più semplici. Il regolo però si presta assai bene a numerosissimi altri calcoli complessi, e le regole da seguirsi nei singoli casi si deducono immediatamente dalle equazioni generali che abbiamo stabilite. Così con una sola posizione dello scorrevole è possibile il calcolo dei prodotti, quozienti, proporzioni, quando alcuno o tutti i termini sono potenze seconde o terze, radici quadrate, linee trigonometriche, logaritmi, ecc. Si potrà utilmente consultare a questo riguardo l'aureo libriccino dell'illustre Quintino Sella, benchè nel medesimo si tratti specialmente di un regolo che presenta qualche piccola differenza da quello che abbiamo descritto (1). Il regolo calcolatore si presta eziandio per la risoluzione di varii problemi che si presentano nelle applicazioni delle matematiche, come la risoluzione dei triangoli, il calcolo di superficie, di volumi, di interessi, la risoluzione di equazioni (2), ecc.

Regolo a scale ripiegate di Mannheim.

Il regolo calcolatore a scale ripiegate rappresenta un'altra modificazione apportata dal Mannheim al regolo primitivo, allo scopo di accrescerne il grado di approssimazione.

In questo nuovo regolo il fisso ha due scale logaritmiche identiche, le cui divisioni si estendono dall'1 al 10. Sulla faccia anteriore dello scorrevole stanno due scale. L'inferiore è divisa in parti uguali da 0 a 500. La superiore è una scala logaritmica speciale ottenuta a questo modo. Supponiamo di avere costrutta una scala logaritmica doppia da 1 a 100, di cui ciascuna delle due metà sia identica alle scale semplici del fisso; dividiamo questa scala doppia in quattro parti uguali, ed immaginiamo soppressi il primo e l'ultimo quarto. Si ottiene così una scala logaritmica che porta 1 nel punto di mezzo, e le cui estremità corrispondono a $\sqrt{10}$ ed a $10\sqrt{10}$, poichè

$$\log.\sqrt{10} = \frac{1}{2} \text{ e } \log.\ 10\sqrt{10} = 1 + \frac{1}{2}.$$

In questa scala i numeri le cui prime cifre significative sono minori delle prime cifre di $\sqrt{10}$ dovranno leggersi a destra del punto di mezzo; quelli le cui prime cifre significative sono maggiori di quelle di $\sqrt{10}$ si leggeranno invece a sinistra.

Il rovescio dello scorrevole è diviso come se una scala logaritmica semplice, da 1 a 10, ma di lunghezza doppia delle precedenti, fosse divisa in due parti uguali, e, ritenuta l'una alla parte superiore, fosse l'altra portata alla parte inferiore dello scorrevole.

Il regolo è munito di un cursore di cui si fa uso allorquando il risultato non può essere ottenuto con una sola posizione dello scorrevole.

Il regolo a scale ripiegate dà un'esattezza doppia di quella che si avrebbe con un regolo primitivo delle stesse dimensioni, non solo per la moltiplicazione e la divisione, ma eziandio per ogni proporzione, per i quadrati, cubi, radici quadrate, cubiche, e simili. Però la mancanza delle scale trigonometriche, ed il molto minor numero delle operazioni eseguibili in una sola posizione dello scorrevole, non ne permisero una grande diffusione.

Regolo in cartone di Lalanne.

Il Lalanne ha fatto costrurre un regolo calcolatore, formato da due cartoni, compresi fra due lastre di vetro. La faccia superiore del cartone fisso porta quattro scale parallele e della stessa lunghezza: esse sono come la

(1) Nel regolo logaritmico a cui si riferisce l'opera di Q. Sella le due scale dello scorrevole sono identiche fra di loro, ed uguali alla scala logaritmica doppia del fisso. Nel rovescio dello scorrevole stanno ancora le tre scale delle parti uguali, dei seni e delle tangenti; però la prima non trovasi fra le altre due, ma contro il lembo inferiore; di più le scale dei seni e delle tangenti procedono nel medesimo senso, da sinistra verso destra. Tale regolo è oggidì sostituito in massima parte da quello descritto di Mannheim, il quale, oltre al permettere di eseguire con una sola posizione dello scorrevole un numero assai più grande di operazioni, somministra una maggiore esattezza quando la moltiplicazione, la divisione ed il calcolo di alcune proporzioni si fanno colle scale inferiori del fisso e dello scorrevole diretto. Si può infatti mercè di esso pervenire nelle citate operazioni ad un'approssimazione uguale a quella che si otterrebbe con un regolo come il primo ma avente una lunghezza doppia.

Intorno al regolo di Mannheim vedasi pure la recente pubblicazione di A. Galassini, *Manuale teorico-pratico per l'uso del Regolo calcolatore Mannheim*. Torino 1886.

(2) Bour, *Résolution des équations numériques du troisième degré au moyen de la règle à calcul* (*Comptes rendus*, ecc., 1857). — A. Labosne, *Instruction sur la règle à calcul*, ecc., Parigi 1872.

scala dei seni, quella delle tangenti, la scala logaritmica doppia, e la scala logaritmica semplice del regolo di Mannheim. Due scanalature praticate nel cartone, l'una fra le due prime scale e l'altra fra le due ultime, lasciano scorgere due scale logaritmiche doppie identiche disegnate sulla faccia anteriore di un cartone scorrevole sotto al fisso. Sulla faccia opposta del fisso e dello scorrevole trovansi quattro scale logaritmiche semplici uguali fra di loro.

Il regolo in cartone è utilissimo per i fattori costanti che si possono indicare sulle varie sue scale, e che facilitano molti calcoli pratici. Il suo inconveniente principale consiste nella fragilità delle lastre di vetro che lo racchiudono (1).

Aritmografo di Castigliano.

Il Castigliano, dottissimo ingegnere delle Strade Ferrate dell'Alta Italia, ha ideato recentemente un importantissimo aritmografo, che serve specialmente per fare moltiplicazioni, divisioni e quarte proporzionali. Esso rappresenta una nuova applicazione della scala logaritmica, per mezzo della quale si può ottenere un grado di esattezza molto superiore a quello degli strumenti comuni, aventi le stesse dimensioni.

Descrizione dell'aritmografo di Castigliano. — L'aritmografo di Castigliano è rappresentato, in scala naturale, dalle figure 1 e 2 della Tav. X.

Esso è costituito di due parti : la *scala* ed il *compasso*.

La *scala* (fig. 1) è una lastra metallica rettangolare, della larghezza di circa m. 0.07 e lunghezza di m. 0.27, sulla quale è incisa una scala logaritmica semplice, della lunghezza di m. 1, spezzata in quattro parti di m. 0.25 ciascuna disposte secondo rette parallele ed equidistanti. Sulle divisioni principali di questa scala sono segnati i numeri: 10 all'origine; 11, 12, 13, ... 99, nei punti intermedii; e 100 all'estremo. L'intervallo fra le divisioni principali è diviso in 50 parti fino al 15; in 20 fino al 37; in 10 fino al 70; ed in 5 parti fra i numeri successivi.

Noi sappiamo che in una scala logaritmica semplice, rettilinea, di lunghezza a, la distanza fra un punto qualunque su cui è scritto il numero M e l'origine è data da a log. M, e, se $a = 1$, dallo stesso log. M. Nell'aritmografo in discorso, la scala essendo spezzata in 4 parti uguali, per un punto M preso come in figura (fig. 700) si avrà:

$$\log. M = B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 M.$$

Dunque la lunghezza che rappresenta log. M in questa scala dipende da due elementi: da un'ascissa B_3M e da

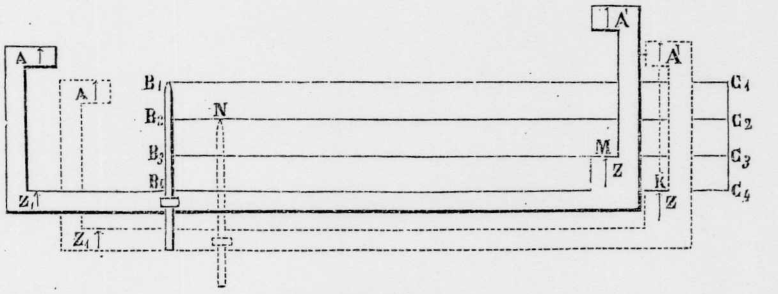


Fig. 700.

un'ordinata $B_1 B_3$. L'ingegnere Castigliano per misurare graficamente questi due elementi si serve di uno speciale compasso, il quale permette di operare sulla sua scala logaritmica spezzata precisamente come si opera col compasso comune sopra di una scala logaritmica rettilinea disposta secondo una medesima retta. Mentre adunque col regolo di Mannheim di m. 0.26 si potrà fare una lettura coll'approssimazione di $\frac{1}{250}$, od al più, usando le scale inferiori, di $\frac{1}{500}$, coll'aritmografo Castigliano di cui ora parliamo l'approssimazione è di $\frac{1}{2000}$.

Il *compasso* (Tav. X, fig. 2) è costituito da una riga piana, metallica o di legno, che porta alle estremità due bracci normali. Sul braccio di sinistra sono segnate due incisioni od indici A, Z', posti sopra una perpendicolare alla lunghezza della riga; sul braccio di destra sono segnati altri due indici A', Z, sopra una seconda normale distante dalla precedente di m. 0.25. L'indice Z' è segnato sulla riga stessa, l'indice Z invece dista dalla riga della distanza costante fra le quattro rette su cui è segnata la scala. Gli indici A ed A' distano di quattro volte la distanza medesima dai rispettivi indici Z' e Z.

A questo modo, quando si dispone la riga parallelamente alla scala in modo che l'indice A sia al principio della seconda linea, l'indice A' cade al termine della prima linea; e così quando si dispone il compasso in modo che l'indice Z cada al termine della terza linea, l'indice Z' cade al principio della quarta. Se poi portiamo l'indice A sull'origine 10 della scala, l'indice Z cadrà all'estremo, mentre i due indici A' e Z' cadono fuori della scala stessa. E questa è l'unica posizione del compasso in cui due dei quattro indici A, A', Z, Z', possono cadere simultaneamente sulla scala, mentre, in generale, posto uno di questi indici sopra una divisione, gli altri tre cadono fuori.

Il compasso deve mantenersi sempre parallelo alle linee della scala logaritmica; a tal uopo sulla *scala* sono segnate altre quattro rette parallele ed equidistanti

(1) Ecco come il Lalanne spiega le circostanze che l'hanno indotto ad adottare tale disposizione : « L'usage de la règle à calcul venait d'être introduit dans l'enseignement secondaire et figurait dans les programmes des connaissances exigées pour l'admission à l'École Polytechnique et à l'École militaire; mais les instruments de ce genre manquaient, et la plate-forme qu'un habile constructeur (M. Gravet, successore di Lenoir) montait à grands frais exigeait encore un long travail. C'est dans ces circonstances que la règle à enveloppe de verre fut imaginée. Au moyen d'une gravure exécutée avec précision, M. Lalanne put faire livrer en quelques semaines aux établissements d'instruction publique, des centaines de règles glissantes, d'une précision généralement égale à celle de la règle en bois, d'une lecture plus facile, donnant plus de résultats, et dont le prix ne surpassait pas le tiers du prix de celle-ci » (*Notices sur les travaux et titres scientifiques de* M. Léon Lalanne, ecc., Parigi 1876, pag. 34).

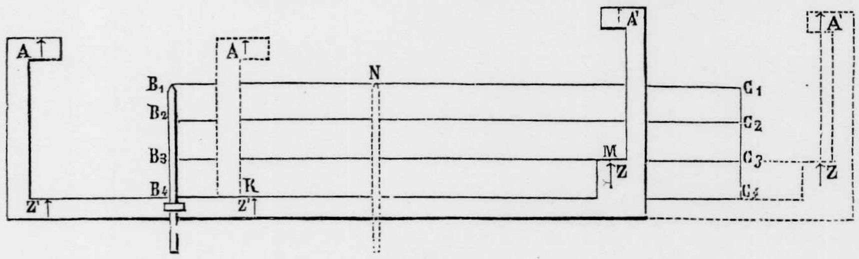


Fig. 701.

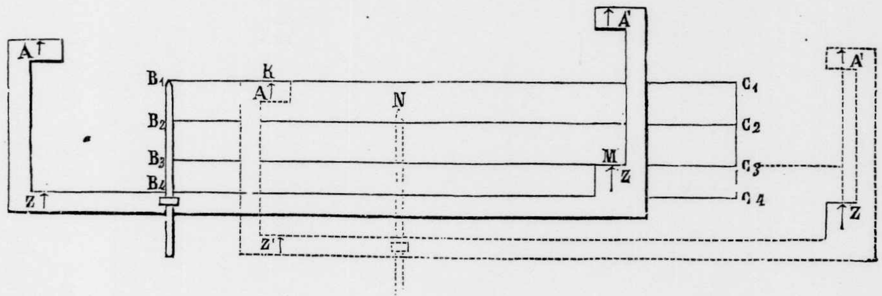


Fig. 702.

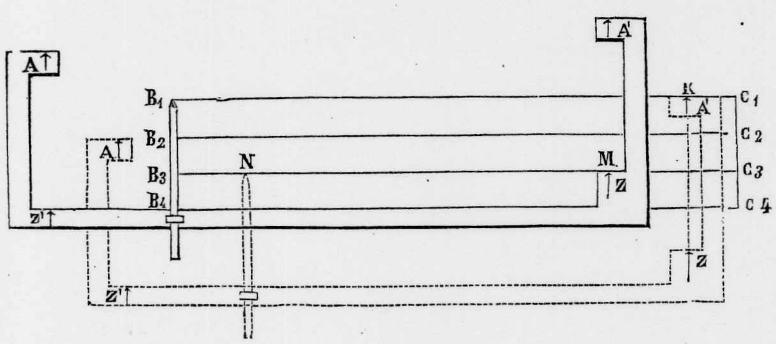


Fig. 703.

come le prime, le quali servono a disporre il compasso nelle varie posizioni.

La riga del compasso ha sezione trapezia, e lungo di essa può farsi scorrere un cursore terminato da un piano inclinato, che viene a lambire il piano della scala. Questo cursore può pure spostarsi normalmente alla riga, e sul suo estremo inclinato è inciso un indice chiamato la *punta*. È molto importante osservare che questa deve sempre restare entro il rettangolo, di cui A e Z sono due vertici opposti e che ha i lati maggiori paralleli alla riga. Questo rettangolo è uguale all'altro $B_1\,C_1\,C_4\,B_4$ (fig. 700) che contiene le quattro linee sulle quali leggonsi le divisioni della scala logaritmica; perciò è chiaro che portando la *punta* sopra una divisione della scala, cadrà sempre sulla scala stessa uno dei quattro indici A, A', Z, Z', e ne cadrà uno solo. Non potrà perciò mai nascere incertezza nell'eseguire le operazioni.

Pratica dell'aritmografo. — Indicheremo con k, m, n, p, i numeri delle cifre intiere di K, M, N, P.

I. *Moltiplicazione* K = M × N.

Si prende sul compasso uno dei fattori, ad es. M, *cioè portato l'indice* Z *sul punto* M *della scala si fa scorrere la punta finchè cada nell'origine. Si sposta poi tutto il compasso parallelamente a se stesso finchè la punta cada sul secondo fattore* N. *Quello dei quattro indici che cade sulla scala segna la parte significativa del prodotto* M × N.

$k = m + n - 1$ *se il prodotto si legge con uno dei due indici inferiori* Z *o* Z';

$k = m + n$ *se il prodotto si legge con uno dei due indici superiori* A *od* A'.

Consideriamo dapprima il caso in cui la lettura del prodotto si fa coll'indice Z (fig. 700).

I logaritmi di M e di N sono dati rispettivamente da:

$$B_1C_1 + B_2C_2 + B_3M = \frac{1}{2} + B_3M;$$

$$B_1C_1 + B_2N = \frac{1}{4} + B_2N;$$

$$\text{Perciò:}\quad \log. MN = \frac{3}{4} + B_3M + B_2N.$$

Ma $B_3M + B_2N = B_4K$, perchè nel trasportare il compasso parallelamente alla sua posizione primitiva, tutti i suoi punti si spostano di una quantità uguale a B_2N parallelamente alla direzione della scala; cosicchè:

$$\log. MN = \frac{3}{4} + B_4K.$$

Ora $\frac{3}{4} + B_4K$ rappresenta eziandio il logaritmo del numero K che è indicato dall'indice Z della scala, cosicchè K è il prodotto dei numeri M ed N.

Supponiamo ora che il risultato sia indicato dall'indice Z' (fig. 701).

In questo caso si ha:

$$\log. M = B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 M ; \qquad \log. N = B_1 N;$$

e quindi:

$$\log. MN = B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 M + B_1 N = \frac{3}{4} + B_4 K.$$

Nei due casi considerati, in cui la lettura del prodotto si è fatta cogli indici Z o Z', la somma delle mantisse dei logaritmi dei due fattori è minore della lunghezza della scala, ossia minore dell'unità. Perciò la caratteristica del logaritmo del prodotto sarà uguale alla somma $(m-1) + (n-1)$ delle caratteristiche dei logaritmi dei due fattori; cosicchè il numero delle cifre intiere del prodotto sarà $m + n - 1$.

Consideriamo ora il caso in cui il risultato è indicato dall'indice A (fig. 702).

Allora abbiamo:

$$\log. M = B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 M = \frac{1}{2} + B_3 M;$$

$$\log. N = B_1 C_1 + B_2 N = \frac{1}{4} + B_2 N;$$

$$\log. MN = \frac{3}{4} + B_3 M + B_2 N = 1 + B_1 K.$$

Supponiamo infine che il prodotto si legga coll'indice A' (fig. 703).

Allora:

$$\log. M = B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 M = \frac{1}{2} + B_3 M;$$

$$\log. N = B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 N = \frac{1}{2} + B_3 N;$$

$$\log. MN = 1 + B_1 K.$$

Vedesi che in questi ultimi due casi considerati, nei quali la lettura del prodotto si fa coll'indice A o coll'indice A', succede sempre che la somma delle mantisse dei logaritmi di M ed N è uguale all'unità più la mantissa del risultato. Il logaritmo del prodotto ha quindi per caratteristica $(m-1) + (n-1) + 1 = m + n - 1$, cosicchè il numero delle cifre intiere del prodotto stesso è $m + n$.

Notiamo ancora che quando K si legge con uno dei due indici inferiori, la mantissa di log. K, essendo la somma delle mantisse dei due fattori M ed N, è maggiore di ciascuna delle mantisse stesse; quando invece K si legge con uno degli indici superiori, la mantissa di log. K è minore di ognuna delle mantisse dei fattori, poichè è la somma di queste mantisse stesse diminuita di 1.

Dalla regola suesposta si deducono immediatamente due corollarii.

1° Disposto il compasso in modo che uno dei quattro indici segni un numero K, se si fa scorrere la punta sopra un numero N, è come se si fosse preso sul compasso la mantissa di log. $\frac{K}{N}$, cioè come se si fosse portato l'indice sul numero $\frac{K}{N}$ e la punta all'origine. Sul numero K si porterà uno dei due indici inferiori Z o Z', ovvero uno dei due superiori A od A', secondochè la mantissa di log. K è maggiore o minore della mantissa di log. N.

In ogni caso non potrà mai nascer dubbio sull'impiego dell'uno o dell'altro dei due indici superiori od inferiori, poichè, a seconda dei valori di K e di N, sarà sempre possibile una sola posizione del compasso.

2° Se i due fattori M ed N sono reciproci, cioè se il loro prodotto è 1, eseguita la moltiplicazione il compasso si troverà disposto coll'indice A all'origine e coll'indice Z all'estremo della scala logaritmica. Disposto quindi il compasso coll'indice A all'origine B_1 della scala, se si fa scorrere la punta sul numero N, è come se si fosse preso sul compasso il numero $\frac{1}{N}$, ossia il reciproco di N.

Da questi corollarii si deducono immediatamente le regole per eseguire la divisione e per risolvere una proporzione.

II. *Divisione* $\qquad K = \frac{M}{N}$.

Si dispone il compasso coll'indice A *all'origine e quindi coll'indice* Z *all'estremo della scala logaritmica, e si fa scorrere la punta sul divisore* N ; *così è preso sul compasso* $\frac{1}{N}$. *Si sposta poi il compasso finchè la punta cada sul dividendo* M. *Quello dei quattro indici che cade sulla scala segna il prodotto* $M \frac{1}{N}$, *cioè il quoziente* $\frac{M}{N}$.

$k = m - n$ *se il quoziente si legge con uno dei due indici inferiori* Z o Z';

$k = m - n + 1$ *se il quoziente si legge con uno dei due indici superiori* A *od* A';

III. *Quarta proporzionale*

$$K = \frac{MN}{P}.$$

Si dispone il compasso in modo che uno degli indici cada sul numero N, *e si fa scorrere la punta sul numero* P; *così è preso col compasso il numero* $\frac{N}{P}$. *Si sposta poi il compasso finchè la punta cada sul numero* M. *Quello dei quattro indici che cade sulla scala segna la quarta proporzionale cercata.*

Nell'applicare questa regola ricordiamo che se la mantissa di log. N è maggiore di quella di log. P, sul numero N della scala si deve portare uno dei due indici inferiori Z o Z'; se invece la mantissa di log. N è minore di quella di log. P, il numero N deve essere letto con uno dei due indici superiori A od A'. Dunque:

$k = m + n - p$ *se* N e K *si leggono entrambi cogli indici inferiori* Z o Z', *oppure coi superiori* A *od* A';

$k = m + n - p + 1$ *se* N *si legge con uno degli indici inferiori* Z o Z', e K *con uno dei superiori* A *od* A';

$k = m + n - p - 1$ *se* N *si legge con uno degli indici superiori* A *od* A', *e* K *con uno degli inferiori* Z o Z'.

L'aritmografo che abbiamo descritto ha la scala logaritmica di m. 1, e spezzata in quattro parti uguali. Ma è chiaro che le proprietà e le regole accennate sussistono tuttavia ove la scala sia più o meno lunga di m. 1, e qualunque sia il numero delle parti uguali in cui la si divide. Così si potrebbe costrurre un aritmografo di maggiore approssimazione colla scala logaritmica ad es. di m. 5, spezzata in 10 parti uguali; la *scala* avrebbe così una lunghezza di circa m. 0.50 ed una larghezza al più di m. 0.08; tale aritmografo equivarrebbe ad un regolo di Mannheim della lunghezza di m. 5 di cui non si usino che le scale inferiori.

Regolo di Castigliano. — Ma la scala logaritmica si può anche non spezzarla affatto, ed il Castigliano ha appunto costruito, sullo stesso principio, un altro aritmografo simile ad un ordinario regolo calcolatore, e destinato all'uso comune in cui non si richiede grandissima approssimazione; ma che però equivale ad un regolo di Mannheim della medesima lunghezza, supposto sempre di non impiegare di questo che le scale logaritmiche semplici inferiori.

Questo altro importantissimo apparecchio (Tav. X, fig. 3) è costituito da un regolo metallico della lunghezza di circa m. 0.26, che porta una scanalatura trapezia lungo la quale può scorrere a dolce fregamento una lastrina metallica: questa rappresenta il compasso dell'aritmografo precedente. Sul regolo fisso, lungo il lembo superiore della scanalatura, è incisa una scala logaritmica semplice della lunghezza di m. 0.25. Sul compasso o scorrevole sono unicamente segnati due indici A e Z alla distanza di m. 0.25, per modo che quando l'indice A coincide coll'origine 10 del fisso, l'indice Z coincide coll'estremo 100. Lungo lo scorrevole può poi alla sua volta spostarsi un cursore munito di punta inclinata in modo da lambire la scala: su questa punta è inciso un piccolo tratto rettilineo che fa da indice.

Le regole che abbiamo stabilite per il precedente aritmografo si possono facilmente estendere a questo, che ne è un caso particolare. Ecco riassunte queste regole.

I. *Moltiplicazione* $K = M \times N$.

Si prende col compasso uno dei fattori, ad es. M, *cioè portato l'indice* Z *dello scorrevole sul punto* M *della scala, si fa scorrere la punta finchè cada nell'origine della scala. Si sposta poi lo scorrevole finchè la punta cada sul secondo fattore* N. *Quello dei due indici* A *o* Z *che cade sulla scala segna il prodotto* $M \times N$.

$k = m + n - 1$ *se il prodotto si legge coll'indice* Z;
$k = m + n$ *se il prodotto si legge coll'indice* A.

II. *Divisione* $K = \frac{M}{N}$.

Si dispone lo scorrevole coll'indice A *all'origine e quindi coll'indice* Z *all'estremo della scala, e si fa scorrere la punta sul divisore* N. *Si sposta poi il compasso finchè la punta cada sul dividendo* M. *Quello dei due indici che cade sulla scala segna il quoziente cercato.*

$x = m - n$ *se il quoziente si legge coll'indice* Z;
$x = m - n + 1$ *se il quoziente si legge coll'indice* A.

III. *Quarta proporzionale*

$$K = \frac{MN}{P}.$$

Si dispone lo scorrevole in modo che uno dei due indici A *o* Z *cada sul numero* N, *e si fa scorrere la punta sul numero* P. *Si sposta poi lo scorrevole finchè la punta cada sul numero* M. *Quello dei due indici che cade sulla scala segna* K.

$k = m + n - p$ *se* N *e* K *sono letti collo stesso indice;*
$k = m + n - p + 1$ *se* N *è letto coll'indice* Z, *e* K *coll'indice* A;
$k = m + n - p - 1$ *se* N *è letto coll'indice* A, *e* K *coll'indice* Z.

Abbiamo parlato con qualche estensione di questi aritmografi dell'ingegnere Castigliano, perchè veramente all'atto pratico essi presentano notevolissimi vantaggi sul regolo ordinario. Ed anzitutto, oltre alla maggiore approssimazione, offrono il vantaggio non meno importante che la lettura sì dei dati che dei risultati si fa sempre mediante gli indici dello scorrevole o quello della punta; col regolo comune, invece, occorre sovente di dover fare letture sopra di una scala in corrispondenza a punti dell'altra su cui non cade una divisione e che perciò devono essere stimati a vista. Egli è vero che cogli aritmografi Castigliano non si possono eseguire che moltiplicazioni, divisioni, e quarte proporzionali; notiamo però, che queste sono appunto le operazioni che più occorrono in pratica e che quindi maggiormente importa di eseguire in modo semplice e rapido. Le operazioni di ordine più elevato, a cui si presta il regolo calcolatore ordinario, essendo di uso assai meno frequente e facile, ne limitano l'impiego completo e razionale a pochissime persone. Ma, come dice benissimo il Castigliano, con questi aritmografi si possono eseguire tutte le operazioni a cui si presta il regolo comune, non solo, ma in modo più facile ed esatto, valendosi delle tabelle numeriche dei quadrati, dei cubi, delle radici, delle linee trigonometriche naturali, che trovansi già calcolate in tutti i manuali.

Inoltre la semplicità massima del regolo Castigliano, il suo costo minimo, il modo facilissimo di valersene, per cui in mezz'ora qualsiasi persona anche poco edotta di matematiche può applicarlo con sicurezza e rapidità, fanno sì che questo nuovo regolo rappresenta il vero strumento che potrà utilmente diffondersi al capo-officina, ed anche all'operajo, per i suoi calcoli correnti. Ci auguriamo quindi che i vantaggi degli aritmografi Castigliano siano giustamente apprezzati, e che il loro uso vada estendendosi, prendendo fra gli strumenti consimili il posto che loro compete. Sarebbe un giusto omaggio reso alla memoria del dotto inventore, troppo presto rapito alla scienza ed all'affetto della famiglia e dei colleghi.

Scala logaritmica dell'ingegnere Berri.

Applicando l'ingegnosa idea dovuta al Castigliano, di spezzare una lunga scala logaritmica in parti della stessa lunghezza sovrapposte, ognuno può facilmente costruirsi una scala logaritmica, la quale occupi piccolissimo spazio e permetta, valendosi del compasso comune o del compasso di riduzione, di eseguire i calcoli con grande esattezza. Ecco la disposizione proposta dall'ingegnere Berri (1).

La scala logaritmica (fig. 704) ha la lunghezza di m. 1 ed è spezzata in 10 parti uguali. Una retta mediana divide ciascun rigo per metà; due altre rette equidistanti dalla precedente li dividono in tre parti uguali. Su questa scala sono segnate, oltre ai numeri 10, 11, 12,..... 100, che corrispondono alle divisioni principali, le frazioni 0.5, $^1/_3$, $^2/_3$, in quei punti che ne dividono l'intiera lunghezza in due ed in tre parti uguali. Questi punti speciali servono, come vedremo, per la estrazione della radice quadrata e della radice cubica.

La posizione di un punto qualunque M (fig. 705) di questa scala si può intendere determinata da due elementi:

1° la distanza di questo punto da uno dei lati verticali o dall'asse XY della scala;

2° il rigo su cui cade il punto M.

La distanza AM a sinistra di M è chiamata, per brevità, il *complemento* di M; la distanza BM a destra, il *supplemento* di M.

(1) C. Berri, *Modo di costruirsi una scala logaritmica con una grande unità ed in poco spazio* (*L'Ingegneria civile*, ecc., 1881, pag. 169).

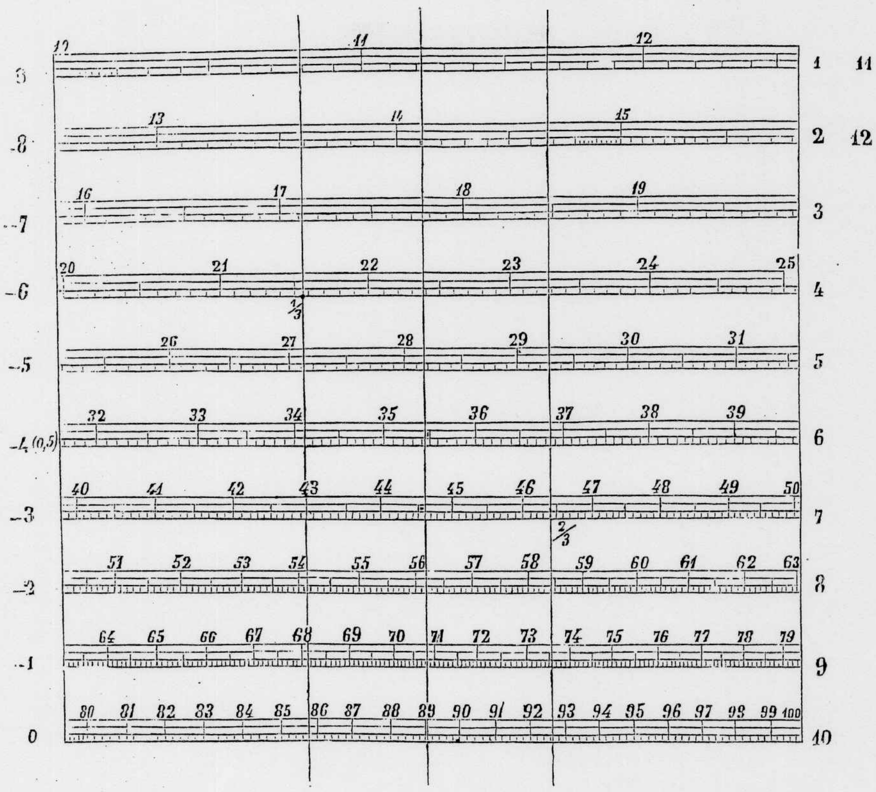


Fig. 704.

Le 10 parti della scala essendo distinte a destra coi numeri progressivi da 1 a 10, si potrà con uno di questi numeri individuare il rigo su cui cade M, o l'*ordine* di M.

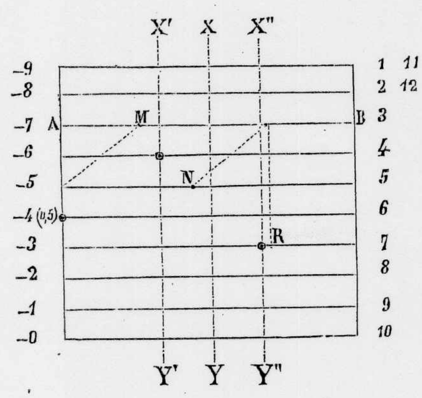


Fig. 705.

Ciò posto, è facile dedurre i procedimenti da seguirsi per applicare tale scala al calcolo numerico; indicheremo rispettivamente con r, m, n, il numero delle cifre intiere di R, M, N, e con μ e ν l'ordine dei numeri M ed N, cioè i numeri con cui sono distinte a destra le parti della scala su cui cadono M ed N.

I. *Moltiplicazione* $R = M \times N$.

Si sommano col compasso i complementi dei due numeri dati M *ed* N (fig. 705) *e tale somma si porta in* R *sul rigo che ha per ordine* $\mu + \nu - 1$; *il numero che si legge sulla scala in corrispondenza del punto* R *così determinato ci dà il prodotto cercato. Se la somma dei due complementi supera la larghezza della scala, il che si scorge immediatamente ad occhio, si sottrae dal complemento minore il supplemento dell'altro numero; la differenza che si ottiene si porta sul rigo che ha per ordine* $\mu + \nu$.

$r = m + n - 1$ *se l'ordine del prodotto non sorpassa il 10;*

$r = m + n$ *se l'ordine del prodotto sorpassa il 10.*

II. *Divisione* $R = \dfrac{M}{N}$.

Se il complemento di M *è maggiore di quello di* N, *si sottrae questo dal primo; l'ordine del quoziente è* $\mu - \nu + 1$. *Se il complemento di* M *è minore di quello di* N, *si aggiunge al complemento di* M *il supplemento di* N; *l'ordine del quoziente è* $\mu - \nu$.

$r = m - n$ *se* M *precede* N *sulla scala;*

$r = m - n + 1$ *se* M *segue* N *sulla scala.*

A rendere più spedita la determinazione del rigo su cui cade il quoziente nel caso in cui il suo ordine riesce negativo, sono segnati a sinistra della scala gli ordini negativi.

III. *Seconda potenza* $R = M^2$

Se M *cade a sinistra dell'asse* XY *della scala, si raddoppia il suo complemento; l'ordine del quadrato è* $2\mu - 1$. *Se* M *cade a destra di* XY, *dal complemento di* M *si sottrae il suo supplemento: l'ordine del quadrato è* 2μ.

$r = 2m - 1$ *se l'ordine del quadrato non sorpassa il 10;*

$r = 2m$ *se l'ordine del quadrato sorpassa il 10.*

IV. *Radice quadrata*

$$R = \sqrt{M}.$$

La mantissa di log. $\sqrt{M}$ *si otterrà dividendo per metà la mantissa di log.* M, *cioè la distanza che corre dal punto* M *all'origine della scala, e portando questa metà dall'origine stessa o dal punto* (0.5) *secondochè il numero delle cifre intiere di* M *è dispari o pari. Ora la mantissa di* M *è costituita di due parti: un certo numero di righi intieri, che si divide mentalmente per metà ricordando che* XY *divide in due parti uguali tutti i righi della scala; ed il complemento di* M, *di cui si trova la metà col compasso di riduzione fissato al rapporto* $^1/_2$. *La somma di queste due metà si porta sulla scala partendo dall'origine se* m *è dispari; dal punto* (0.5) *se* m *è pari.*

$$r = \frac{m+1}{2} \text{ se } m \text{ è dispari;}$$

$$r = \frac{m}{2} \text{ se } m \text{ è pari.}$$

Si tratti, ad es., di estrarre la radice quadrata del numero M rappresentato nella fig. 706. La metà della mantissa di M sarà data dalla metà di AM più un rigo e mezzo: se m è dispari si porterà dunque la metà di AM, presa col compasso di riduzione, in BR; se m invece è pari, questa stessa metà si porterà in B' R', a partire dal punto B' che dista dal (0.5) di un rigo e mezzo.

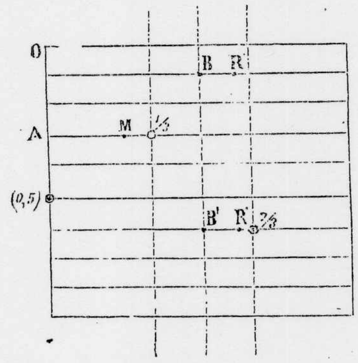


Fig. 706.

V. *Radice cubica* $R = \sqrt[3]{M}.$

La mantissa di log. $\sqrt[3]{M}$ *si ottiene prendendo il terzo della mantissa di log.* M, *e portandola: dall'origine della scala, se* $m+2$ *è un multiplo di* 3; *dal punto* $^1/_3$ *della scala, se* $m+1$ *è un multiplo di* 3; *dal punto* $^2/_3$ *se* m *è un multiplo di* 3. *Il numero dei righi intieri contenuti nella mantissa di log.* M *si divide mentalmente per* 3, *osservando che le rette* X' Y', X'' Y'' *dividono in 3 parti uguali ciascun rigo della scala; il complemento di* M *si divide per* 3 *col compasso di riduzione fissato al rapporto* $^1/_3$. *La somma di queste due terze parti si porta sulla scala partendo dall'origine, o dal punto* $^1/_3$ *o dal punto* $^2/_3$ *della scala, secondochè* $\frac{m+2}{3}$ *o* $\frac{m+1}{3}$ *od* $\frac{m}{3}$ *è intiero.*

$$r = \frac{m}{3} \text{ se } m \text{ è un multiplo di } 3;$$

$$r = \frac{m+1}{3} \text{ se } m+1 \text{ è un multiplo di } 3;$$

$$r = \frac{m+2}{3} \text{ se } m+2 \text{ è un multiplo di } 3.$$

Aritmografo circolare.

Sopra tre circonferenze di circolo concentriche segniamo tre scale logaritmiche (fig. 707): una scala logaritmica doppia, sulla circonferenza esterna; ed una scala logaritmica semplice, su ciascuna delle altre due.

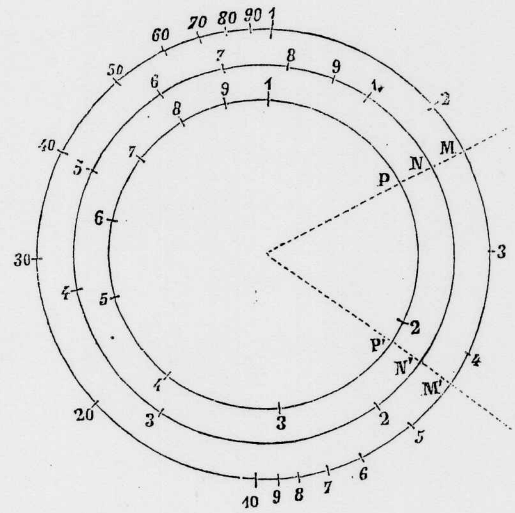


Fig. 707.

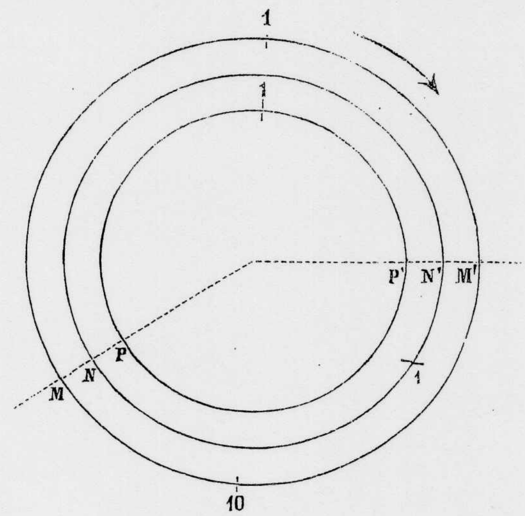


Fig. 708.

La scala esterna e quella interna siano fisse e colle origini coincidenti; la scala intermedia, invece, sia girevole attorno al centro comune. Si ottiene così un aritmografo a scale circolari, il quale permette di calcolare i prodotti, i quozienti, ed i quarti termini delle proporzioni, colla stessa esattezza che somministra un regolo di Mannheim, di cui non si usino che le scale inferiori, e la cui lunghezza sia uguale alla circonferenza di contatto delle due scale intermedia ed interna.

Spostata comunque la scala intermedia, diciamo M, N, P ed M' N' P' i numeri delle tre scale che trovansi sopra due raggi. Allora si ha:

$$\frac{\sqrt{M}}{N} = \frac{\sqrt{M'}}{N'} = \frac{P}{N} = \frac{P'}{N'};$$

purchè sia contemporaneamente:

$$\frac{m+1}{2} - n = \frac{m'+1}{2} - n' = p - n = p' - n'.$$

Ove m ed m' rappresentano il numero delle cifre intiere di M ed M', ovvero questi numeri diminuiti di un'unità, secondochè M ed M' si leggono sulla prima o sulla seconda parte della scala doppia esterna; p e p' indicano il numero delle cifre intiere di P e P'. Finalmente n e n' indicano il numero delle cifre di N ed N' allorquando N ed N' si leggono fuori dell'intervallo compreso fra l'origine delle scale fisse e l'origine della scala mobile, come succede nella figura 707. Se invece, N' ad es., cade in questo intervallo, come indica la figura 708, ove la freccia indica l'andamento delle divisioni, n' supera di una unità il numero delle cifre intiere di N'.

Aritmografo circolare di Herrmann.

Descrizione dell'apparecchio. — L'aritmografo circolare di Herrmann (1) è rappresentato, in grandezza naturale, dalle figure 709 e 710. Esso è costituito da un disco metallico AA, su cui è applicato un cerchio di carta il quale porta stampate 10 scale. Questo circolo diviso è protetto da una lastra di vetro, e si può far girare a mano col disco AA attorno ad un asse C, portato da un piccolo treppiede di sostegno. L'asse del disco porta due sottili lancette: l'una L, *nera*, è fissa; l'altra L', *rossa*, è mobile attorno all'asse stesso mercè un bottoncino inferiore D, che l'operatore manovra a mano. Tanto la lancetta mobile L', come il disco A, possono farsi ruotare nell'uno o nell'altro verso, e nel loro movimento si sceglie sempre il percorso minore.

Scale del disco. — La scala maggiore è una scala logaritmica semplice disposta secondo una circonferenza di circolo del diametro di m. 0.142: la sua lunghezza è quindi di m. 0.446. Questa scala può essere evidentemente considerata come una scala logaritmica multipla, composta di un numero infinito di scale semplici uguali e sovrapposte: essa serve per il calcolo dei prodotti, quozienti e quarte proporzionali.

La seconda scala (*Quadrat*) è una scala logaritmica doppia; e la terza (*Cubus*) è una scala logaritmica tripla.

La quarta (*Kreisumfang*) e la quinta (*Kreisinhalt*) sono scale logaritmiche che dànno la lunghezza della circonferenza e l'area del circolo di dato diametro.

La sesta (*Log.*) è la scala delle parti uguali.

La settima (*Sin 10 fach*) e l'ottava (*Sin 100 fach*) sono scale logaritmiche dei seni, e servono: la prima per archi maggiori di 5° 44'; la seconda per archi minori di 5° 44'.

La nona (*Tang 1 fach*) e la decima (*Tang 10 fach*) sono scale logaritmiche delle tangenti, e servono: la prima per archi compresi fra 45° e 84° 16'; la seconda per archi compresi fra 5° 44' e 45°.

Facendo girare il disco AA in modo che la lancetta fissa L corrisponda ad un numero qualsiasi della scala logaritmica maggiore, ad es., come è indicato in figura, al numero 1.97, si legge lungo la stessa lancetta:

Sulla seconda scala $1.97^2 = 3.88$;

» terza » $1.97^3 = 7.64$;

» quarta » la circonferenza di diametro 1.97: $\pi \times 1.97 = 6.19$;

» quinta » l'area del circolo di diametro 1.97: $\frac{1}{4} \pi \times 1.97^2 = 3.05$;

» sesta » log. $1.97 = 0.294$;

Sulla settima scala l'angolo il cui seno è 0.197: $0.197 = \text{sen. } 11° 21'$;

» ottava » l'angolo il cui seno è 0.0197: $0.0197 = \text{sen. } 1° 8'$;

» nona » l'angolo la cui tangente è 1.97: $1.97 = \text{tang. } 63° 10'$;

» decima » l'angolo la cui tangente è 0.197: $0.197 = \text{tang. } 11° 10'$.

Pratica dell'aritmografo di Herrmann. — Nell'uso di questo apparecchio la lancetta fissa L deve sempre essere diretta normalmente all'operatore, ed i risultati devono essere letti alla lancetta fissa stessa.

I. *Moltiplicazione* $X = M \times N$.

Si porta uno dei fattori, M, *letto sulla scala maggiore sotto la lancetta fissa, e la lancetta mobile alla origine* 1 *della scala stessa. Poscia si fa girare il disco finchè il secondo fattore* N *cada sotto la lancetta mobile. La lancetta fissa segna sulla scala maggiore il prodotto cercato.*

Ove si dovessero fare più moltiplicazioni di due fattori uno dei quali rimane costante, converrà disporre questo fattore costante sotto la lancetta fissa e la lancetta mobile all'origine. Portando allora successivamente sotto la lancetta mobile l'altro fattore, si leggeranno alla lancetta fissa i varii prodotti.

II. *Divisione* $X = \frac{M}{N}$.

Si porta il dividendo M *sotto la lancetta fissa, e la lancetta mobile sul divisore* N. *Poscia si fa girare il disco finchè l'origine della scala cada sotto la lancetta mobile. La lancetta fissa segna il quoziente* X.

III. *Quarta proporzionale*

$$X = \frac{M \times N}{P}.$$

Si porta uno dei medii M *sotto la lancetta fissa e la lancetta mobile sull'estremo cognito* P. *Poscia si fa girare il disco finchè l'altro medio* N *cada sotto la lancetta mobile. La lancetta fissa segna* X.

L'apparecchio si userebbe allo stesso modo per il calcolo dell'espressione:

$$X = \frac{M \times N \times P \times Q \times \ldots}{R \times S \times T \times \ldots}.$$

IV. *Potenze e radici*

$$X = M^2 \; ; \; X = M^3.$$

Portato sotto la lancetta fissa un numero qualunque M *letto sulla scala maggiore, si legge sulla seconda* (*Quadrat*) *il quadrato* M^2, *e sulla terza* (*Cubus*) *il cubo* M^3.

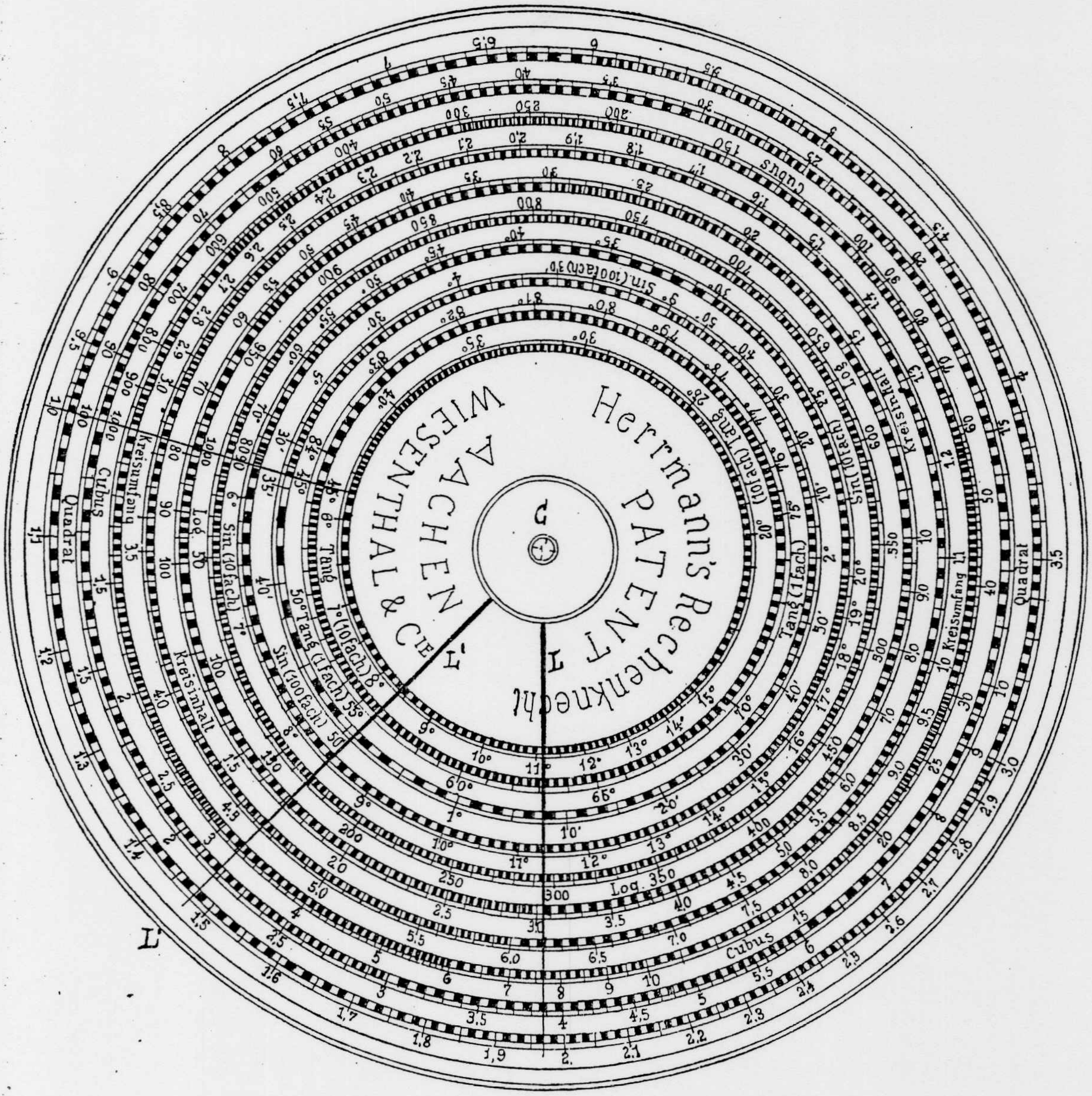
$$X = \sqrt{M}; \qquad X = M^{\frac{3}{2}}.$$

Portato sotto la lancetta fissa un numero M *qualunque letto sulla seconda scala, si legge sulla prima* $\sqrt{M}$ *e sulla terza* $M^{\frac{3}{2}}$.

$$X = \sqrt[3]{M}; \qquad X = M^{\frac{2}{3}}.$$

Portato sotto la lancetta fissa un numero M *qualunque letto sulla terza scala, si legge sulla prima* $\sqrt[3]{M}$, *e sulla seconda* $M^{\frac{2}{3}}$.

(1) HERRMANN'S, *Rechenknecht von Wiesenthal und C.ie in Aachen*, 1878. — *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, ottobre 1877. — *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, 1878.



L

Fig. 709.

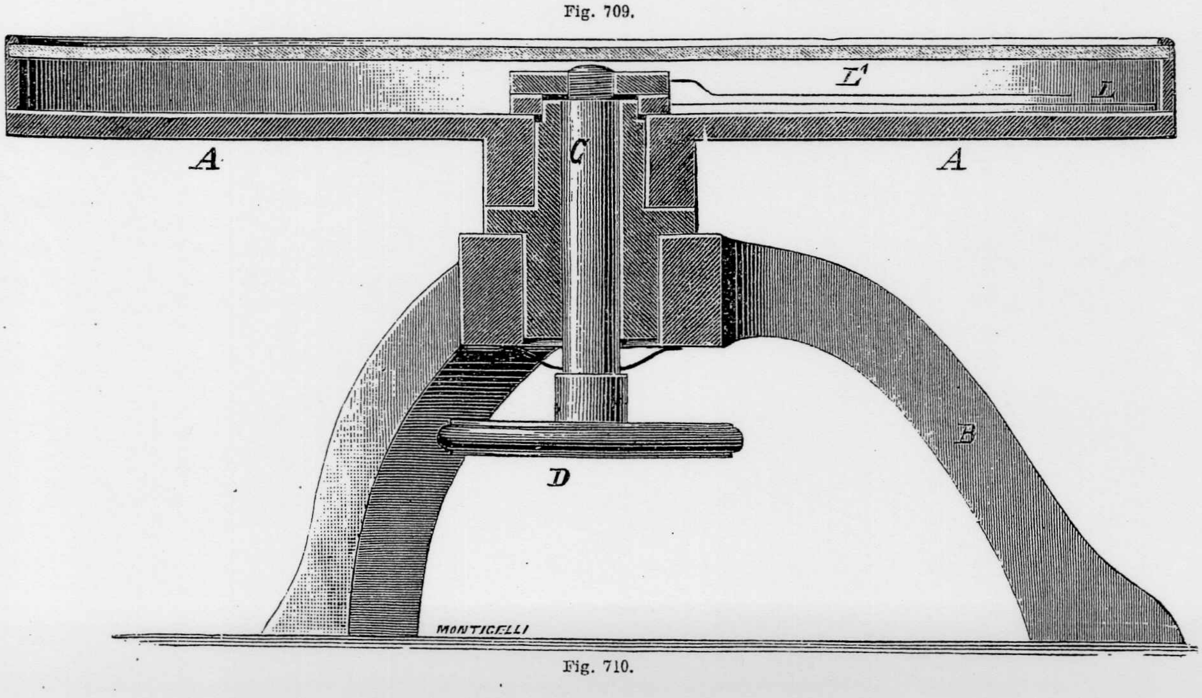


Fig. 710.

V. *Calcolo dell'espressione:*

$$X = \frac{M^{\alpha} \times N^{\beta}}{P^{\gamma}},$$

ove α β γ possono avere i valori

$$1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2};$$

notando però che gli esponenti frazionarii devono avere lo stesso numeratore, come nelle espressioni:

$$\frac{M^{\frac{2}{3}} \times N}{P^2}, \quad \frac{M \times N^{\frac{3}{2}}}{P^{\frac{3}{2}}}.$$

La regola è identica a quella stabilita per la quarta proporzionale, osservando però che, dopo di aver trasformati gli esponenti in modo che il loro numeratore sia comune, ***i numeri* M, N, P, *si leggono sulla prima, sulla seconda, o sulla terza scala, secondochè il denominatore del loro esponente è* 1 *o* 2 *o* 3, *ed il risultato si legge sulla scala indicata dal numeratore comune.***

Così se:

$$X = \frac{M^{\frac{2}{3}} \times N}{P^2} = \frac{M^{\frac{2}{3}} \times N^{\frac{2}{2}}}{P^{\frac{2}{1}}},$$

si leggerà M sulla terza scala, N sulla seconda, P sulla prima, ed X sulla seconda.

Ci limitiamo a questi calcoli semplici; ognuno potrà estendere facilmente le regole indicate ai varii calcoli complessi.

Il numero delle cifre intiere dei risultati si determina in ogni caso tenendo conto della scala logaritmica semplice su cui esso cade, e la cosa si potrà riconoscere badando al giro od al numero dei giri intieri dati dal disco.

L' aritmografo di Herrmann presenta certamente molti vantaggi sul regolo di Mannheim, avuto riguardo specialmente alla maggiore approssimazione con cui si possono eseguire i prodotti, i quozienti, le quarte proporzionali, i calcoli delle espressioni trigonometriche, ed alla massima facilità con cui si ottengono i quadrati, i cubi, le radici quadrate, cubiche, le circonferenze, la superficie dei circoli, e le espressioni con esponenti frazionarii di cui abbiamo parlato in ultimo. Però il suo costo, e le sue dimensioni che non permettono di farne uno strumento tascabile, ne limitano l'uso a quei casi in cui, più che all'opportunità di potere eseguire speditamente e dovunque un calcolo, si bada alla maggiore precisione.

Aritmografo cilindrico.

Fra le diverse disposizioni date alle scale circolari citiamo quella per cui esse vengono disposte sulla superficie di un cilindro (fig. 711). Così le tre scale dell'aritmografo circolare, cioè la scala logaritmica doppia e le due semplici potrebbero essere incise sopra la superficie convessa di un cilindro, intorno al cui asse girasse poi la porzione della sua superficie, sovra cui si trova la scala intermedia. Siffatto aritmografo godrebbe di tutte le proprietà che si riconobbero nell'aritmografo circolare.

Un aritmografo cilindrico, munito non solo delle scale logaritmiche dei numeri, ma eziandio di quelle delle linee trigonometriche, venne proposto fin dal 1850 dall'illustre Porro, l'inventore della celerimensura, allo scopo di facilitare il calcolo delle formole che si presentano nelle operazioni tacheometriche (1).

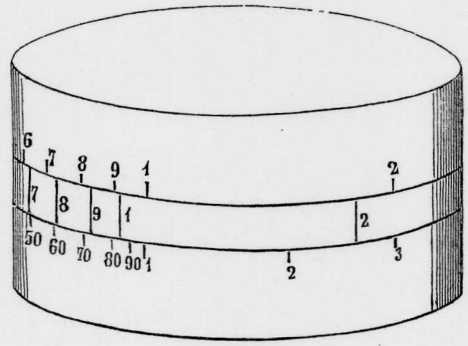


Fig. 711.

Elica calcolatrice di Fuller.

Descrizione dell'apparecchio. — Il professore Giorgio Fuller di Belfast, nell'intento di potersi servire di una lunga scala logaritmica e quindi di ottenere una grande approssimazione, immaginò di disporre la scala logaritmica secondo un'elica cilindrica (2). L'elica calcolatrice di Fuller è rappresentata nella figura 712.

La scala logaritmica semplice, che ha la lunghezza di 500 pollici, cioè di m. 12.70, è stampata sopra di un foglio di carta avvolto su di un cilindro *d*. Alla sua origine è segnato il numero 100, all'estremo il numero 1000, e queste due estremità cadono sulla medesima generatrice del cilindro. Questa scala è divisa in 999 parti principali e sulle varie divisioni trovansi i numeri 101, 102, 103,..... 999; gli intervalli poi fra queste divisioni principali sono suddivisi in 10 parti fino alla divisione 650, in 5 nelle rimanenti; cosicchè le divisioni segnate sulla scala corrispondono ai numeri:

100; 100.1; 100.2; 100.3; 650;

650.2; 650.4; 650.6; 650.8; ..... 1000.

Qualsiasi numero di quattro cifre si potrà quindi leggere sulla scala o direttamente sopra una divisione, o, nel caso più sfavorevole, a metà distanza fra due divisioni consecutive. Di più lo spazio compreso fra le divisioni più vicine essendo sempre maggiore di $^1/_2$ mm., si potranno facilmente stimare ad occhio anche i numeri di 5 cifre.

Il cilindro *d* che porta la scala logaritmica può farsi ruotare e scorrere a mano lungo un altro cilindro *ff* fisso, il quale è munito inferiormente di un'impugnatura con cui l'operatore sostiene lo strumento; al cilindro *ff* è fissata un'asticciuola, la quale porta un indice *b fisso* che lambisce la scala. Un terzo cilindro *g*, che può farsi scorrere e ruotare a mano entro al cilindro *ff*, porta una seconda asticciuola *n*, munita di due indici *c*, *a*, che diremo *mobili*, distanti fra di loro quanto le due estremità della

(1) J. Porro, *La Tachéométrie, ecc.*, Turin 1850.

(2) *Spiral slide rule, equivalent to a straight slide rule 83 feet 4 inches long, or a circular rule 13 feet 3 inches in diameter*, George Fullee M. Inst. C E., professor of engineering in the Queen's University, Ireland. London 1878.

scala logaritmica; cosicchè quando l'indice superiore c è portato all'origine 100 della scala, l'indice inferiore a cade all'estremo 1000.

L'indice fisso b, ed uno dei due indici mobili, ad es. l'inferiore a, fanno le veci delle due punte del compasso comune usato sulla scala logaritmica rettilinea, e servono, come questo, a prendere sulla scala la mantissa del logaritmo di un numero, ed a sommarla o sottrarla, a seconda dei casi, colla mantissa del logaritmo di un altro numero. In questo apparecchio però il compasso rimane fisso, mentre la scala è mobile col cilindro d.

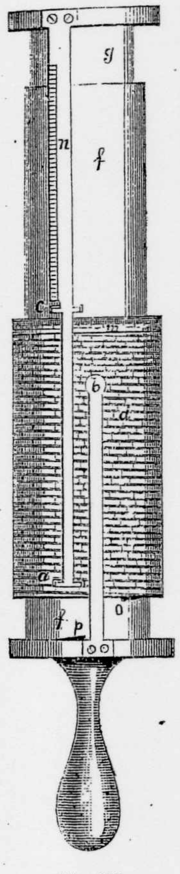


Fig. 712.

Al cilindro d è fissato inferiormente un piccolo dente od arresto o: quando questo dente è portato in contatto con un altro dente simile p congiunto al cilindro ff, l'indice fisso b cade all'origine 100 della scala. Disposto il cilindro d in questa posizione, se si porta uno dei due indici mobili c, a, sopra un numero M qualsiasi della scala, si è presa sugli indici fisso e mobile la mantissa di log. M; e, comunque si sposti poi il cilindro d, i due indici fisso e mobile, restando alla stessa distanza relativa, segneranno sempre sulla scala due numeri in cui la differenza dei logaritmi è costante, *cioè due numeri il cui rapporto è sempre lo stesso.*

Pratica dell'elica calcolatrice. — I. *Moltiplicazione*

$$X = M \times N.$$

Si porta l'indice fisso b *all'origine della scala, e l'indice mobile inferiore* a *ad uno dei fattori,* M *ad es. Poscia si sposta a mano il cilindro* d *finchè l'indice fisso* b *cada sull'altro fattore* N. *In corrispondenza a quello dei due indici mobili che cade sulla scala si legge il prodotto cercato.*

Con una sola operazione si può pure ottenere il prodotto di tre fattori:

$$X = M \times N \times P.$$

Si porta l'indice fisso b *all'origine e quello mobile inferiore* a *ad uno dei fattori,* M *ad es.; poi si muove il cilindro* d *finchè l'indice mobile* a *cada all'estremo della scala. Si porta poscia l'indice* a *sul secondo fattore* N, *e si sposta il cilindro* d *finchè l'indice fisso cada sul terzo fattore* P. *In corrispondenza a quello dei due indici mobili che cade sulla scala si legge* X.

II. *Divisione* $\quad X = \frac{M}{N}.$

Si porta l'indice fisso b *sul divisore* N, *e sul dividendo* M *si porta l'indice mobile superiore od inferiore secondochè la prima cifra significativa del divisore è maggiore o minore della prima cifra significativa del dividendo. Si sposta quindi il cilindro* d *finchè l'indice fisso* b *cada all'origine della scala. In corrispondenza a quello dei due indici mobili che cade sulla scala si legge il quoziente cercato.*

III. *Quarta proporzionale*

$$X = \frac{M \times N}{P}.$$

Si sposta il cilindro d *finchè l'indice fisso* b *cada sull'estremo cognito* P, *e si porta uno degli indici mobili sopra uno dei medii,* M *ad es. Si sposta poi il cilindro* d *finchè l'indice fisso* b *cada sull'altro medio* N. *In corrispondenza a quello dei due indici mobili che cade sulla scala si legge* X.

IV. *Potenze e radici* $X = M^t$,

ove t può essere intiero o frazionario, positivo o negativo.

La potenza o la radice di un numero si ottengono facilmente coll'apparecchio di Fuller moltiplicando direttamente l'esponente t per il logaritmo del numero proposto. Per avere log. M servono due scale ausiliarie, una delle quali m è segnata sul bordo superiore del cilindro d, e l'altra lungo l'asta n che collega i due indici mobili. Disposto l'indice superiore c sopra un numero M della scala logaritmica, si legge sulle due scale ausiliarie m ed n la mantissa di log. M; aggiungendo a questa la caratteristica $m - 1$ si ha log. M. Allora per ottenere la potenza M^t si moltiplica a parte log. M per t, e così si ottiene log. M^t. Leggendo poi la mantissa di questo logaritmo sulle due scale m ed n, l'indice c segna sulla scala logaritmica la potenza cercata.

Abbiamo visto così come si proceda coll'elica di Fuller ai calcoli più semplici; l'apparecchio si presta, come tutti gli strumenti analoghi, a molti calcoli complessi e speciali, come il calcolo degli interessi, la determinazione delle aree, dei volumi, ecc.

Notiamo ancora che sul cilindro ff sono stampate parecchie tavole: una di esse si riferisce alle regole da seguirsi nei varii casi per la determinazione del numero delle cifre intere del risultato; le altre dànno i rapporti fra i pesi, misure e monete inglesi con quelle del sistema metrico decimale. Ognuno poi potrà aggiungere quegli altri numeri o formole che più gli torneranno opportuni.

L'elica calcolatrice di Fuller deve essere specialmente considerata come uno strumento capace di grande approssimazione, poichè equivale ad un regolo di Mannheim di cui si usino le sole scale inferiori, lungo m. 12.70; di più le letture sulla scala si fanno sempre mediante indici. Però le sue dimensioni relativamente grandi, che non ne fanno per certo uno strumento portatile, ed il suo costo, che supera il decuplo di quello di un regolo ordinario di Mannheim, ne limitano notevolmente l'uso. D'altra parte, anche considerato quale strumento di precisione, presenta l'inconveniente che nell'avvolgere la scala sul cilindro, difficilmente si può ottenere un'elica perfetta senza soluzioni di continuità lungo la linea di congiunzione.

Tavola calcolatrice di Lalanne.

Descrizione della tavola calcolatrice. — La tavola calcolatrice, proposta da Lalanne nel 1845 (1) sotto il nome di *Abaque* o *Compteur universel*, è un'ingegnosissima tavola grafica a divisione logaritmica. Essa consiste (fig. 713) in un quadrato di cui i lati sono divisi come le scale logaritmiche dei numeri nei regoli calcolatori. La scala del lato inferiore e quella del lato di sinistra hanno l'origine comune, e sulle loro divisioni

(1) L. Lalanne, *Description et usage de l'Abaque ou Compteur universel.* Paris 1845; 2ª edizione, 1851; 3ª edizione, 1863.

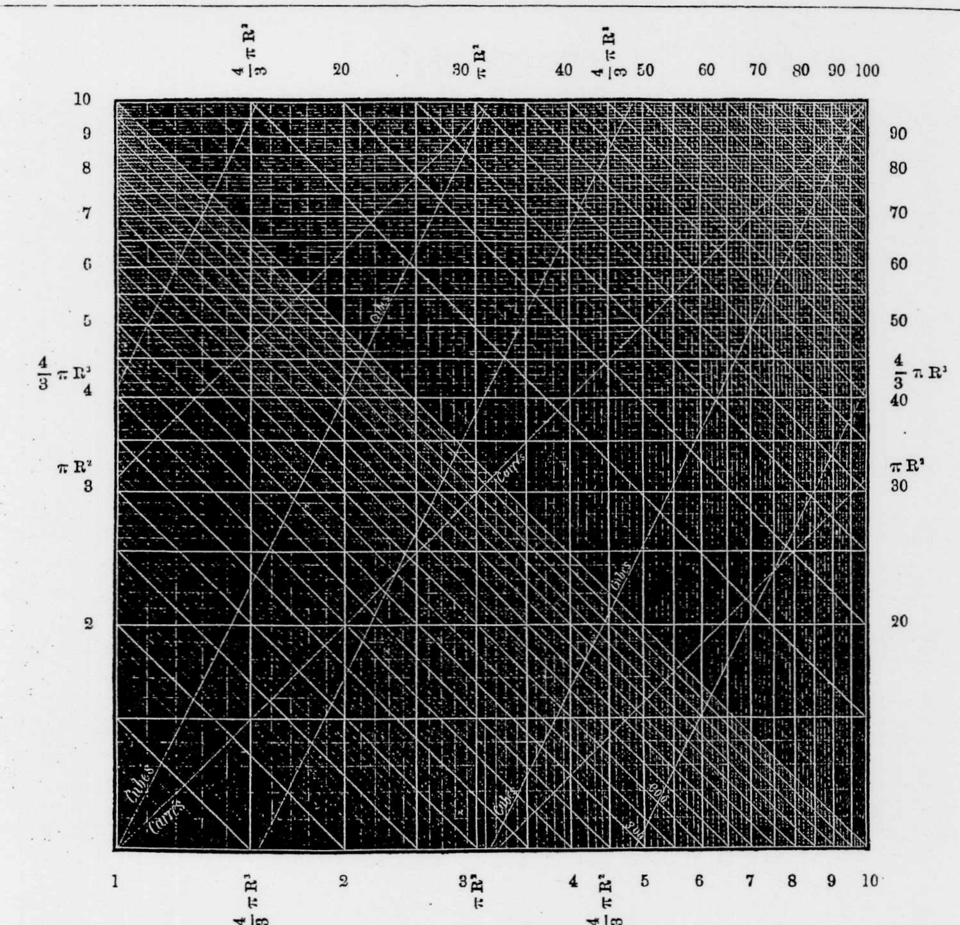


Fig. 713.

principali sono segnati i numeri 1, 2, 3,..... 10; le altre due scale hanno per origine l'estremo delle scale precedenti, e portano, come la seconda metà di una scala logaritmica doppia, i numeri 10, 20, 30,..... 100. I punti di divisione sono riuniti fra di loro da rette *orizzontali* e *verticali* parallele ai lati del quadrato, e da *oblique* parallele alla diagonale 10, 10. Ognuna di queste rette rappresenta non solo il numero direttamente leggibile sul lato del quadrato a cui si termina, e compreso perciò fra 1 e 10 oppure fra 1 e 100, ma ben anco qualsiasi altro numero avente la stessa parte significativa.

La tavola calcolatrice è un'applicazione del principio generale di trasformazione chiamato da Lalanne *anamorfosi geometrica*, di cui abbiamo fatto cenno parlando della tavola grafica di Pouchet (pag. 539). La semplice traduzione grafica della tavola pitagorica, cioè dell'equazione $z = xy$, dà luogo ad una tavola grafica formata da iperbole equilatere omotetiche riferite ai loro assintoti. Portando le coordinate di queste linee, non più proporzionali ai valori di x e di y, ma proporzionali ai valori di log. x e di log. y, le iperbole diventano rette parallele log. z = log. x + log. y, inclinate a 45° sugli assi.

Consideriamo una qualunque di queste oblique a 45°, e da un punto preso ad arbitrio sopra di essa abbassiamo le perpendicolari sul lato inferiore e sul lato di sinistra del quadrato. La somma di queste due perpendicolari è manifestamente costante qualunque sia il punto dell'obliqua considerata, ed uguale alla distanza fra l'origine 1 delle scale ed il punto in cui l'obliqua stessa (prolungata se occorre) incontra il lato inferiore del quadrato. Siano M, N, ed X, i numeri che corrispondono alle tre rette, orizzontale, verticale, ed obliqua, passanti per uno stesso punto del quadrato; allora si ha:

$$\log. X = \log. M + \log. N;$$

e per conseguenza: $X = MN$.

Dunque l'orizzontale M e la verticale N s'incontrano sull'obliqua MN: così il punto d'intersezione dell'orizzontale 4 e della verticale 2 cade sull'obliqua 8.

Pratica della tavola calcolatrice. — Indicheremo, come al solito, con x, m, n, p, i numeri delle cifre intiere di X, M, N, P.

I. *Moltiplicazione* $X = M \times N$.

Letto M sopra il lato inferiore della tavola, se ne percorre la corrispondente verticale fino all'incontro dell'orizzontale N; l'obliqua passante per il punto d'incontro somministra X.

$x = m + n - 1$ *se X cade nella prima metà (triangolo* 10, 1, 10) *della tavola;*

$x = m + n$ *se X cade nella seconda metà (triangolo* 10, 100, 10) *della tavola.*

II. *Divisione* $X = \frac{M}{N}$.

Si segue l'orizzontale N fino all'incontro dell'obliqua M: la verticale passante per il punto d'incontro determina X.

$x = m - n + 1$ *se l'obliqua M può assumersi nella prima metà della tavola;*

$x = m - n$ *se l'obliqua M deve assumersi nella seconda metà della tavola.*

III. *Quarta proporzionale* $X = \frac{MN}{P}$.

Si segue l'orizzontale P *fino all'incontro dell'obliqua M; la verticale che passa per il punto d'incontro taglia l'orizzontale N in un punto, per cui passa l'obliqua X.*

$x = m + n - p$ *se le oblique* M *ed* X *cadono nella stessa metà della tavola;*

$x = m + n - p + 1$ *se l'obliqua M cade nella prima metà, e l'obliqua* X *nella seconda metà della tavola;*

$x = m + n - p - 1$ *se l'obliqua M cade nella seconda metà, e l'obliqua* X *nella prima metà della tavola.*

IV. *Seconda potenza*

$$X = M^2.$$

Per elevare un numero alla seconda potenza il procedimento da seguirsi è più semplice di quello indicato per la moltiplicazione, osservando che l'orizzontale e la verticale corrispondenti ad un medesimo numero s'intersecano sempre sulla seconda diagonale 1.100 (*carrés*) della tavola.

Si segue la verticale M *fino all'incontro della seconda diagonale; l'obliqua passante per il punto d'incontro determina* X.

$x = 2m - 1$ *se l'obliqua* X *è nella prima metà della tavola;*

$x = 2m$ *se l'obliqua* X *cade nella seconda metà della tavola.*

V. *Radice quadrata*

$$X = \sqrt{M}.$$

Si cerca il punto d'incontro dell'obliqua M *colla seconda diagonale; la verticale passante per questo punto determina* X. *L'obliqua* M *si prende nella prima o nella seconda metà della tavola, secondochè m è impari o pari.*

$$x = \frac{m+1}{2} \text{ se } m \text{ è impari;}$$

$$x = \frac{m}{2} \text{ se } m \text{ è pari.}$$

VI. *Terza potenza e radice cubica.*

Congiungiamo con una retta l'origine 1 della tavola col punto di mezzo del lato superiore, e da un punto qualsiasi di questa retta, segnata in figura colla parola *cubes*, immaginiamo abbassate le perpendicolari sul lato inferiore e sul lato di sinistra del quadrato. La prima di queste perpendicolari è doppia della seconda. Se adunque diciamo N, M, X, i numeri che corrispondono all'orizzontale, alla verticale, ed all'obliqua di uno stesso punto della linea dei cubi, si ha:

$$\log. N = 2 \log. M;$$

ma

$$\log. X = \log. M + \log. N;$$

perciò

$$\log. X = \log. M + 2 \log. M = 3 \log. M = \log. M^3;$$

e quindi

$$X = M^3.$$

Cosicchè la verticale M incontra la linea dei cubi in un punto per cui passa l'obliqua M^3.

Allo scopo di completare la linea dei cubi è tracciata un'altra retta, pur essa distinta colla parola *cubes*, la quale congiunge il punto di mezzo del lato inferiore coll'estremo 100 della tavola.

Ecco quindi il procedimento da seguirsi per determinare il cubo di un numero dato M.

Si segue la verticale M *fino all'incontro di una delle due rette dei cubi; l'obliqua che passa per il punto d'incontro determina* M^3.

$x = 3m - 2$ *se la verticale M incontra la retta dei cubi passante per* 1 *nella prima metà della tavola;*

$x = 3m - 1$ *se la verticale M incontra la retta dei cubi passante per* 1 *nella seconda metà della tavola, ovvero la retta dei cubi passante per* 100 *nella prima metà della tavola;*

$x = 3m$ *se la verticale M incontra la retta dei cubi passante per* 100 *nella seconda metà della tavola.*

Per l'estrazione della radice cubica si segue un procedimento inverso.

VII. *Potenze e radici di grado qualunque.*

Le linee che servono per ottenere le potenze o le radici di grado qualunque si determinano in modo simile a quanto si è detto testè per la linea dei cubi. La quarta potenza, ad es., si troverà sull'una delle tre trasversali che si possono tracciare sulla figura coll'inclinazione di 1 di base per 3 di altezza; la quinta potenza sull'una delle quattro trasversali inclinate ad 1 di base per 4 di altezza; e così di seguito. La prima di queste trasversali partirà sempre dall'origine 1 della tavola e le successive dal piede della verticale passante per l'estremo della trasversale precedente.

La stessa cosa vale per le potenze frazionarie maggiori dell'unità. Così, per la potenza $\frac{3}{2}$, l'inclinazione delle trasversali sarebbe di 1 di base per $\frac{3}{2} - 1$ o $\frac{1}{2}$ di altezza. Ora la prima retta dei cubi è precisamente inclinata sul lato di sinistra del quadrato come dovrebbe essere la linea delle potenze $\frac{3}{2}$ sul lato inferiore. La linea dei cubi può adunque servire per determinare le potenze di grado $\frac{3}{2}$, considerando il lato di sinistra come lato inferiore del quadrato.

VIII. *Calcoli complessi che si possono eseguire colla tavola calcolatrice.*

Per facilitare le operazioni in cui il numero 2π entra come moltiplicatore o divisore, si traccia ordinariamente l'orizzontale che passa per il punto 6.28 del lato di sinistra della tavola. Col mezzo di questa linea si può ottenere, colla massima facilità, la circonferenza di un circolo di cui si conosce il raggio, o, reciprocamente, il raggio di una circonferenza di lunghezza nota.

Le due trasversali segnate πR^2 passano per i punti 3.14 dei lati inferiore e sinistro della tavola, e sono parallele alla seconda diagonale del quadrato. Esse servono a trovare immediatamente l'area di un circolo di cui si conosce il raggio, o, reciprocamente, il raggio di un circolo di area nota.

Le tre trasversali segnate $\frac{4}{3}\pi R^3$, tracciate parallelamente alle linee dei cubi, servono a risolvere i problemi relativi al volume della sfera.

Alle divisioni segnate sui lati del quadrato si possono aggiungere altre divisioni corrispondenti a quantità che entrano in calcoli speciali, come l'area di un poligono regolare di cui si conosce il lato, il peso di un corpo di cui si conosce la densità ed il volume, le proporzioni dei diversi corpi che entrano in una combinazione chimica, gli elementi di calcolo delle formole relative alla caduta dei corpi, all'efflusso dei liquidi, alle oscillazioni pendolari, ecc.

Quando si debbano eseguire colla tavola calcolatrice dei computi in cui entrano linee trigonometriche, si dispongono, all'esterno del quadrato e parallelamente ai due lati verticali, le scale logaritmiche delle linee trigonometriche. Ciascuna di tali scale non è sopra una retta sola, ma è divisa in due parti uguali poste sovra rette parallele. Se per una divisione qualunque delle scale trigonometriche si conduce una orizzontale, questa viene ad indicare sopra i lati verticali della tavola il seno o la tangente dell'angolo corrispondente alla divisione considerata. A rendere facile la ricerca del punto in cui tale orizzontale interseca i lati verticali della tavola, si inserisce fra ciascuna coppia delle scale trigonometriche, una ripetizione delle divisioni che si trovano sui lati verticali della tavola. Mercè tale disposizione, si possono facilmente eseguire prodotti, divisioni, proporzioni, e simili in cui entrano linee trigonometriche.

Disponendo infine, parallelamente ad uno degli altri lati del quadrato, una scala delle parti uguali, si può ottenere immediatamente il logaritmo di un numero qualsiasi.

La tavola calcolatrice di Lalanne stesa sovra un'assicella od un cartone, ed accompagnata da uno stilo con cui si possano seguire le varie linee, può dare un'esattezza non inferiore a quella somministrata da un regolo di Mannheim lungo quanto il lato della tavola, del quale però non si usino che le scale inferiori. La semplicità dei procedimenti con cui si eseguiscono colla medesima i varii calcoli, la facilità di costruzione, e quindi il costo lievissimo, ne fanno un apparecchio assai utile in quei casi in cui non è richiesta una grandissima approssimazione. Però la lettura dei valori numerici, anche eseguita con uno stilo, presenta una certa difficoltà in causa delle numerose rette parallele assai vicine da cui essa è costituita.

La tavola calcolatrice di Lalanne è stata riprodotta, con poche modificazioni, nel 1875 da Herrmann nella sua *Graphisches Einmalens*, e nel 1877 dal Vogler nelle *Sechs graphische Tafeln.*

Planimetri.

La misura delle superficie piane è un problema che si presenta assai frequentemente nelle scienze applicate. La sua risoluzione si può ottenere meccanicamente col mezzo di ingegnosi apparecchi chiamati *planimetri* (ted. *Planimeter;* ingl. *planimeter;* franc. *planimètre*). Essi rappresentano un caso particolare di una classe di meccanismi che sono conosciuti sotto il nome di *integratori meccanici*, poichè eseguiscono, in determinate condizioni e con mezzi meccanici, la somma di una serie infinita di quantità infinitesime; queste possono essere, a seconda dei casi, o gli elementi di una superficie piana limitata da una curva, ovvero gli elementi di un'altra quantità complessa qualsiasi, momento statico, momento d'inerzia, lavoro meccanico, calore, energia elettrica, ecc.

L'origine dei planimetri è relativamente recente, poichè non risale oltre il nostro secolo. Prima della loro invenzione la planimetria meccanica non possedeva che alcuni procedimenti primitivi, quali il *metodo delle pesate*, applicato per la prima volta da Galileo e ripreso, nel 1714, da Marinoni, ed il *metodo del reticolo*, rappresentato dagli apparecchi di Hogrefe e di Gaetano Cairo.

La prima idea di un vero integratore atto alla misura meccanica delle aree, e la costruzione del primo di tali apparecchi, è dovuta ad un Italiano, a Tito Gonnella, professore nell'Accademia di belle Arti in Firenze. Il planimetro di Gonnella fu proposto nel 1824; giudicato favorevolmente, verso lo scorcio dello stesso anno (1), da una Commissione speciale composta dei professori toscani Giorgi, Inghirami, Doveri, Foggi, Frullani, Gerbi, Nesti, Pacchioni, Paoli, Passerini, Pieraccioli, Pierattini, ed i Membri dell'Istituto di Francia, conte Fossombroni e Libri, formò oggetto di una Memoria pubblicata nell'anno seguente dallo stesso Gonnella (2). Introdotto ben presto nei lavori catastali, e modificato in seguito colla sostituzione di un disco al cono primitivo, ricevette i maggiori elogi in occasione della terza riunione degli scienziati italiani nel 1841, quindi all'Esposizione industriale toscana del 1851, e poscia, nel 1852, alla grande Esposizione di Londra, dove riportò in premio la medaglia di prima classe (*Council Medal*) colla conferma del diritto di proprietà. La data, 1824, dell'invenzione di questo apparecchio assicura indiscutibilmente la priorità del Gonnella sopra tutti gli inventori di strumenti consimili, e particolarmente sopra l'Oppikofer, a cui si è per molto tempo attribuita la prima idea del planimetro.

Tuttavia il concetto di un apparecchio sommatore atto alla misura delle superficie si manifestò quasi contemporaneamente e sotto varie forme in diversi paesi. Nel 1826 l'Oppikofer, allora ingegnere al servizio del Cantone di Berna, ideò, e costruì coll'ajuto del meccanico Pfülli, un planimetro a cono, che gli valse, nel 1836, la medaglia d'oro del merito all'Esposizione industriale di Berna. Il planimetro di Oppikofer ricevette importanti modificazioni e perfezionamenti dall'Ernst, dal Wetli, e dall'Hansen di Gotha, e cominciò a diffondersi, benchè tuttavia lo strumento non fosse ridotto a quella semplicità ed a quel grado di facile uso, che si raggiunse poi abbandonando l'idea di Oppikofer e facendo dipendere la disposizione del meccanismo da altro principio. Nel 1829, Coriolis costruiva un *dinamometro contatore*, in cui una rotella appoggiata sopra di un cono agiva come una serie d'ingranaggi a variazione continua: questo apparecchio forniva la somma dei prodotti degli sforzi elementari per gl'intervalli di tempo durante i quali questi sforzi erano rispettivamente sviluppati. Poncelet perveniva al medesimo risultato colla sua *macchina integratrice:* il contatore si muoveva sopra un disco girevole, il quale non era che un caso particolare del cono di Coriolis. L'illustre scienziato aveva così ritrovata, senza saperlo, la soluzione già data dal nostro Gonnella. Alcuni anni più tardi, nel 1839, Léon Lalanne, i cui lavori sulla tecnologia del calcolo sono numerosi ed interessanti, e che aveva già immaginata una *bilancia aritmetica*, proponeva sotto il nome di *aritmoplanimetro* una macchina da calcolare importantissima, combinando il principio del planimetro con quello delle scale logaritmiche.

(1) *La Geometria delle curve applicata alle arti ed alla industria ad uso delle Scuole d'arti e mestieri, ecc.* Lezioni pubbliche dette nell'I. e R. Istituto Tecnico di Firenze nell'anno scolastico 1849-50 dal professore Niccola Collignon. Firenze, Tip. Barbèra, Bianchi e C., 1857, pag. 43. — A. Favaro, *Beiträge zur Geschichte der Planimeter*, Wien 1874. — A. Favaro, *L'integratore di Duprez ed il planimetro dei momenti di Amsler*. Padova 1872.

(2) *Teoria e descrizione di una macchina colla quale si quadrano le superficie piane (Planimetro Gonnella).* Dall'*Antologia*, aprile, maggio, giugno dell'anno 1825, tomo 18°. Al Gabinetto Scientifico-letterario, di G. P. Viesseaux, direttore ed editore. Tipografia di Luigi Pezzati, Firenze 1825.

Il planimetro ortogonale di Gonnella, ed i numerosi altri apparecchi che appartengono a questo tipo, sono oggidì sostituiti, nelle applicazioni correnti almeno, dal *planimetro polare*, inventato nel 1856 dal professore Iacob Amsler Laffon di Sciaffusa. Questo apparecchio è stato oggetto di numerosi perfezionamenti dovuti allo stesso inventore ed a molti altri scienziati, che ne sentirono la massima sua importanza ed utilità. Le piccole dimensioni, il costo minimo di fronte ai planimetri ortogonali, la facilità dell'uso, l'esattezza dei risultati, e la possibilità di eseguire la quadratura di superficie anche estesissime, fanno del planimetro polare un apparecchio veramente prezioso in tutte le questioni di planimetria.

Nella stessa memoria in cui l'Amsler fa cenno per la prima volta del planimetro polare (1) è descritto un altro strumento, destinato a somministrare i valori degli integrali:

$$A = \int y\,d\,x, \quad S = \frac{1}{2}\int y^2\,d\,x, \quad I = \frac{1}{3}\int y^3\,d\,x.$$

Tale strumento, che l'Amsler chiama col nome di *integratore*, doveva servire per determinare l'area, il momento statico, ed il momento d'inerzia di una figura piana. Di questo strumento non si comprese immediatamente tutta l'importanza, e mentre il planimetro polare si diffondeva per ogni dove ed andava a sostituire i costosi e complicati planimetri ortogonali, l'integratore, cioè il planimetro dei momenti, era quasi interamente dimenticato. Si è al dott. E. Winkler, professore nel Politecnico di Vienna, che deve attribuirsi il merito di aver studiata la vecchia proposta dell'Amsler e di averne riconosciuto il lato utile ed applicabile. Nella tornata dell'8 gennajo 1870 egli ne riferiva alla Società degli Ingegneri ed Architetti austriaci, dimostrando come esso si presti mirabilmente alla determinazione del centro di gravità, ai calcoli relativi alla resistenza dei materiali, alla determinazione dei momenti statici per travi gravate da pesi, nei lunghi calcoli relativi alla determinazione delle distanze medie nei trasporti di terra, e ad un'infinità di altre operazioni che occorrono assai di frequente nella pratica dell'ingegneria. L'apparecchio è oggidì abbastanza conosciuto e diffuso, non solo in Germania, ma eziandio nel nostro e negli altri paesi.

In questi ultimi anni l'Abdank-Abakanowics (2) ideò, e costruì colla collaborazione del signor Napoli, alcuni nuovi apparecchi, i quali risolvono la questione della somma di un numero infinitamente grande di termini infinitesimi, tracciando la curva integrale. Questi apparecchi, che il suo inventore chiama *Intégraphes*, permettono eziandio la risoluzione dei problemi planimetrici, la ricerca dei momenti, i calcoli che si riferiscono alla resistenza dei materiali, ecc.

Ci occuperemo brevemente del planimetro ortogonale di Gonnella e del planimetro polare di Amsler.

Planimetro ortogonale di Gonella.

Descrizione dell'apparecchio. — Le figure 714, 715, 716 rappresentano rispettivamente la projezione orizzontale, la fronte, ed il fianco, nella scala di $^1/_3$, del planimetro ortogonale di Gonnella costrutto da Goldschmid di Zurigo, esistente nelle collezioni della R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Torino.

Sopra di una base metallica B munita di tre guide rettilinee parallele può spostarsi un carretto C a tre ruote *r*. Questo carretto sostiene una lunga riga A A normale alla direzione delle guide, ed un disco circolare D di vetro smerigliato parallelo al piano della base B. La riga A A è scorrevole orizzontalmente nel senso della sua lunghezza fra le quattro puleggie *r'*, ed il disco D ruota attorno ad un perno passante pel suo centro e perpendicolare al suo piano. Alle estremità della riga A A trovansi i piccoli cilindri *m*,*m*, che servono a tenere teso un filo finissimo di argento o di platino, il quale si avvolge sul tamburo *c* invariabilmente congiunto coll'asse di rotazione del disco di vetro D. Mercè questo filo, la traslazione longitudinale della riga A A produce la rotazione del disco D (3). All'estremità della riga A A è fissata la punta od il *calcatojo* P destinato a percorrere il perimetro della figura da quadrarsi. Questo calcatojo potrà evidentemente muoversi in qualsiasi direzione, poichè ad esso ubbidiscono contemporaneamente i moti del carretto C e della riga A A. Se esso si muove in direzione normale alla riga, il suo movimento è comunicato al solo carretto C, e perciò il disco D, benchè trascinato progressivamente da questo, non riceve alcun moto di rotazione. Se il calcatojo P invece si muove nella direzione della riga, il disco D riceve la sola rotazione attorno al proprio asse.

Sul disco gravita normalmente un secondo disco o *rotella* di vetro D', girevole attorno ad un asse parallelo alla direzione delle guide inferiori e passante per l'asse del disco D. I perni entro cui ruota l'asse di rotazione della rotella D' sono praticati nell'intelajatura *nn* portata dalla base B dell'apparecchio. La rotella D', essendo così fissata indipendentemente dal carretto C e dalla riga A A, non può ricevere da questa che il solo moto rotatorio di sviluppo che le è impresso dal disco D su cui si appoggia. All'estremità dell'asse di rotazione della rotella D' è fissata normalmente al medesimo una lancetta S la quale scorre su di un quadrante Q diviso in parti uguali, e segna perciò ingranditi sopra di questo i minimi moti di rotazione della rotella. Allo scopo di valutare il numero intiero dei giri fatti dalla lancetta, senza essere costretti di contarli mentre lo strumento trovasi in azione, all'estremo dell'asse della rotella è disposto un rocchetto che imbocca con una ruota dentata; quest'ultima ha la corona divisa in parti uguali ciascuna delle quali corrisponde ad un mezzo giro della lancetta. I due piccoli cilindri *p*, *p* impiantati nella base B dell'apparecchio determinano le posizioni estreme a cui può pervenire il carretto C.

Teoria ed uso del planimetro ortogonale. — Consideriamo un rettangolo A B C D (fig. 717 e 718) disposto coi due lati A B, C D paralleli alla riga e quindi cogli altri due lati B C, A D paralleli alle guide. Diciamo:

a il lato A B di questo rettangolo;

b il lato A D;

d la distanza E O del punto di contatto della rotella dal centro O del disco;

r il raggio O F del tamburo su cui si avvolge il filo metallico;

r' il raggio della rotella.

(1) *Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebenen Figuren insbesondere über einen neuen Planimeter von Jakob Amsler, Professor am Gymnasium in Schaffausen*. Schaffausen, A. Beck und Sohn, 1856.

(2) ABDANK-ABAKANOWIKS, *Les Intégraphes, la courbe intégrale et ses applications*. Paris 1886.

(3) Nei primi planimetri costrutti da Gonnella la riga A era dentata lungo tutta la sua lunghezza, e la trasmissione del suo movimento al disco si faceva col mezzo di un rocchetto dentato disposto sull'asse del disco stesso.

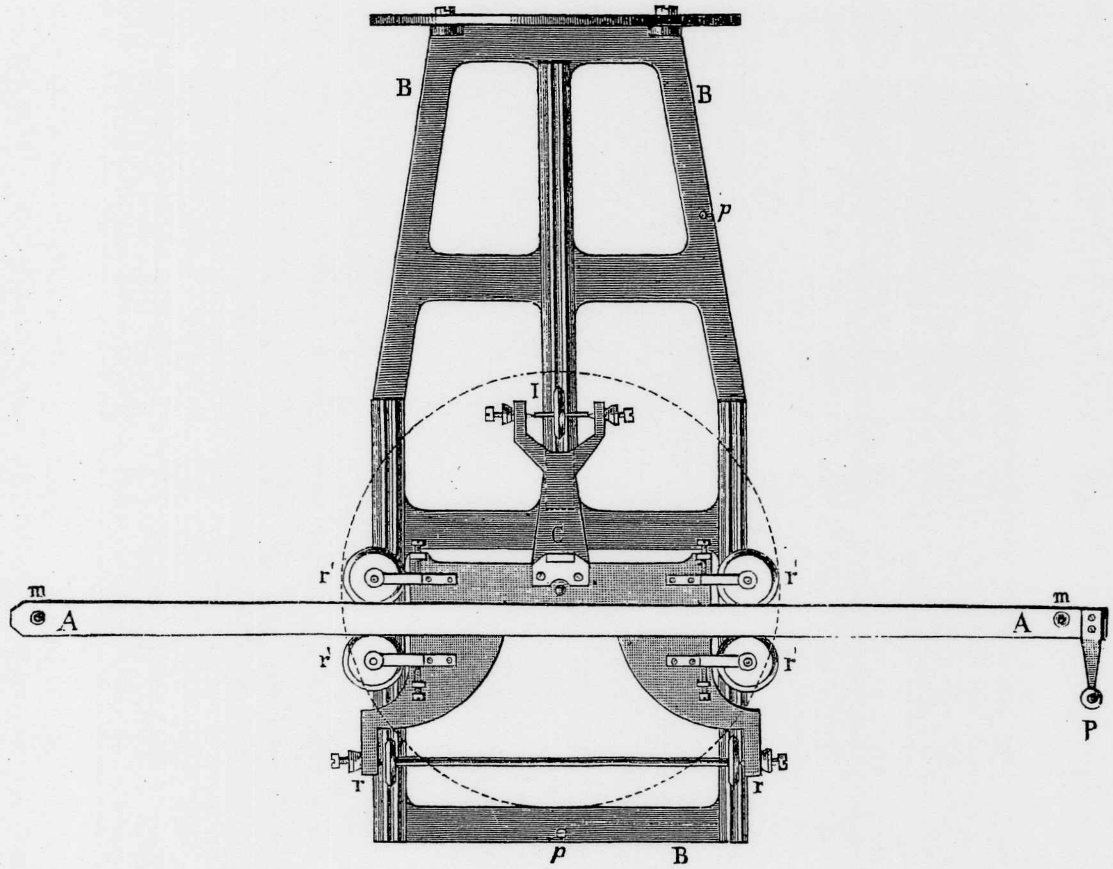


Fig. 714.

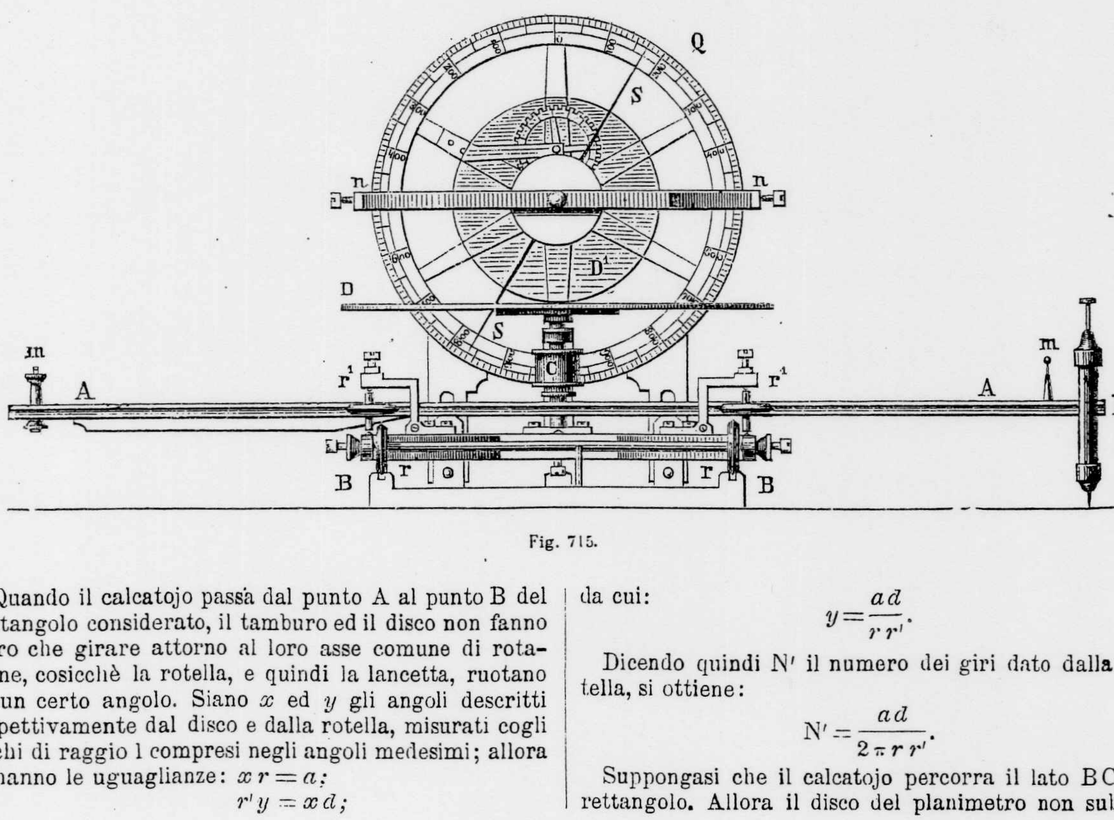


Fig. 715.

Quando il calcatojo passa dal punto A al punto B del rettangolo considerato, il tamburo ed il disco non fanno altro che girare attorno al loro asse comune di rotazione, cosicchè la rotella, e quindi la lancetta, ruotano di un certo angolo. Siano x ed y gli angoli descritti rispettivamente dal disco e dalla rotella, misurati cogli archi di raggio 1 compresi negli angoli medesimi; allora si hanno le uguaglianze: $x\,r = a;$

$$r'\,y = x\,d;$$

da cui:

$$y = \frac{a\,d}{r\,r'}.$$

Dicendo quindi N' il numero dei giri dato dalla rotella, si ottiene:

$$N' = \frac{a\,d}{2\pi\,r\,r'}.$$

Suppongasi che il calcatojo percorra il lato BC del rettangolo. Allora il disco del planimetro non subisce

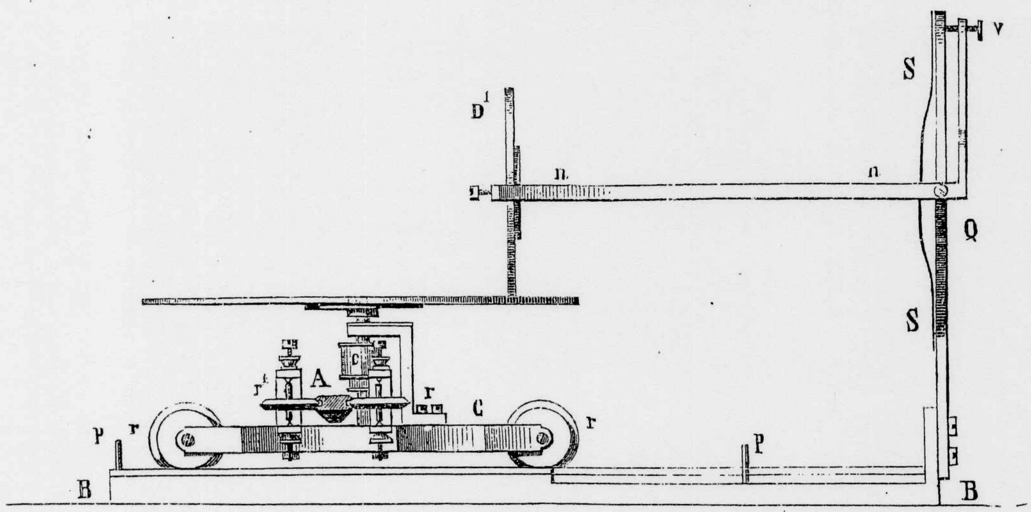


Fig. 716.

che una traslazione di ampiezza BC, cosicchè la lancetta rimane in riposo. La distanza OE$=d$ del punto di contatto della rotella dal centro O del disco subisce un aumento (fig. 717) od una diminuzione (fig. 718) b. Tale

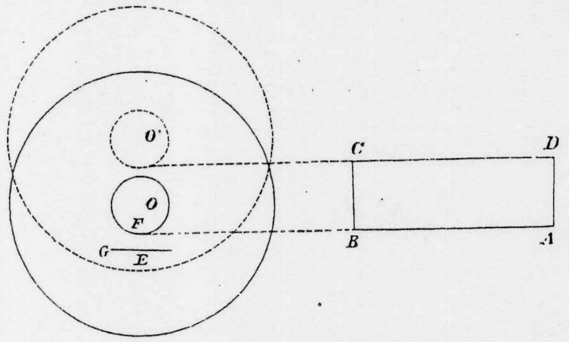


Fig. 717.

distanza diventa adunque $d \pm b$, e, per conseguenza, se il calcatojo pervenuto all'estremo C del lato BC prende a percorrere il terzo lato CD del rettangolo, la rotella

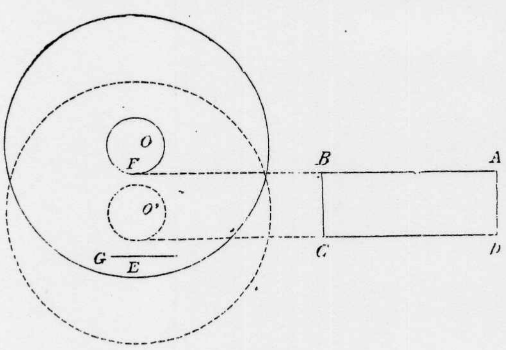


Fig. 718.

e quindi la lancetta percorreranno in verso contrario al verso della rotazione precedente un numero N″ di giri dato dalla formola:

$$N'' = \frac{a(d \pm b)}{2\pi r r'};$$

e la lancetta che prima segnava N′ ora segnerà:

$$N'' - N' = \frac{a(d \pm b) - a d}{2\pi r r'} = \frac{\pm a b}{2\pi r r'}.$$

Facendo infine percorrere dal calcatojo il lato DA del rettangolo, il disco subisce una traslazione uguale e contraria alla precedente, cosicchè la distanza O′E$=d \pm b$ ridiventa OE $= d$, ma senza che abbia luogo alcuna rotazione del disco e quindi della rotella e della lancetta.

Dall'ultima equazione ricaviamo:

$$ab = 2\pi r r' (\pm N'' \mp N'),$$

ove i segni superiori si riferiscono al caso della figura 717, ed i segni inferiori a quello della figura 718.

Questa formola esprime evidentemente che *l'area* ab *del rettangolo considerato è proporzionale al numero dei giri dati dalla rotella, quando col calcatojo si percorra, sempre nello stesso verso, l'intiero perimetro del rettangolo stesso.*

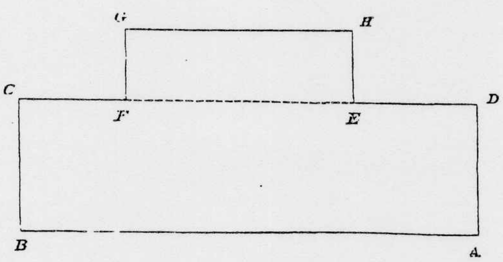


Fig. 719.

È facile estendere questa proprietà al caso di una figura piana qualsiasi. Ed invero si supponga che invece di un solo rettangolo se ne abbiano due ABCD, EFGH, congiunti come indica la figura 719. Se il calcatojo percorre dapprima il perimetro di uno di questi rettangoli e poscia quello dell'altro, è chiaro che la lancetta segnerà sul quadrante un numero di giri proporzionale alla somma delle aree delle loro superficie. Però il tratto EF comune ai medesimi è percorso due volte in senso contrario, cosicchè descrivendo col calcatojo il solo perimetro esterno della figura il numero dei giri dato dalla lancetta è ancora proporzionale alla somma delle aree dei due rettangoli. Lo stesso si può dire quando si abbiano più di due rettangoli in tal modo congiunti, e quindi anche per una figura piana qualsiasi, la quale si può sempre intendere scomposta in tante liste rettangolari di altezza infinitamente piccola e col lato maggiore parallelo alla riga. Dicendo quindi S l'area della superficie di una figura piana limitata da una linea qualsiasi, N il numero dei giri fatti dalla lancetta mentre il calcatojo ne percorre l'intiero perimetro, si ha:

$$S = 2\pi r r' N = m N,$$

facendo $$2\pi r r' = m.$$

Il coefficiente m, costante per uno stesso planimetro, deve essere determinato sperimentalmente. Perciò si farà percorrere dal calcatojo il contorno di una figura di area nota, e si osserverà il numero dei giri e parti di giro fatti dalla lancetta: questo numero diviso per l'area della figura dà il valore di m. Ripetendo l'operazione per diverse figure si otterranno varii valori, pochissimo diversi, di m: la loro media aritmetica rappresenterà il coefficiente proprio allo strumento di cui si tratta.

L'uso di questo planimetro riesce della massima comodità pratica allorquando il quadrante è graduato in modo che ogni sua divisione rappresenti una determinata unità superficiale. Perciò prima di costruire l'apparecchio, conviene fissare la superficie che deve corrispondere ad un giro intiero della lancetta. Allora S è noto, di più $N = 1$, e quindi l'equazione $S = 2\pi r r' N$ permetterà di ricavare il raggio r' della rotella quando sia determinato il raggio r del tamburo. Nel planimetro rappresentato in figura l'intiera rotazione della lancetta corrisponde ad una superficie di 2000 mm². Il quadrante essendo diviso in 200 parti uguali, ciascuna di queste corrisponderà a 10 mm². Di più la ruota dentata è costruita in modo da lasciare passare una sua divisione ad ogni mezzo giro della lancetta, cosicchè ogni divisione della ruota dentata corrisponde a 1000 mm². La cifra delle migliaja si legge adunque sulla ruota dentata, quella delle centinaja alle divisioni principali del quadrante, e quella delle decine alle piccole divisioni del quadrante stesso.

Planimetro polare di Amsler.

Descrizione dell'apparecchio. — Questo semplice ed utilissimo apparecchio (fig. 720) è costituito da due aste metalliche A B, P Q, articolate e munite alla loro estremità di due punte I, S. La punta I è il calcatojo che deve percorrere il contorno della figura da quadrarsi. La punta S è un piccolo ago che serve a fissare lo strumento sul tavolo su cui è distesa la figura: questa punta, la quale è stabilmente mantenuta nella posizione assegnatagli da un peso cilindrico sovrapposto R, costituisce il *polo* dello strumento. L'asta maggiore AB ha sezione quadrata ed attraversa a dolce fregamento un cursore C il quale appoggia sul piano del disegno mediante una rotella T a bordo arrotondato. Fissando convenientemente il polo sul piano di una figura data, e facendo percorrere il contorno di questa figura dal calcatojo, la rotella T si muove ora strisciando ed ora girando attorno al proprio asse di rotazione, e fa un certo numero di giri, il quale, come ora vedremo, è proporzionale all'area della figura considerata. La rotella è congiunta invariabilmente ad un tamburo cilindrico di diametro alquanto minore di quello della rotella stessa. Il contorno di questo tamburo è diviso in 100 parti uguali, ed un piccolo nonio M fisso al cursore C fa da indice e permette di apprezzare i decimi delle minime parti tracciate sul tamburo, cioè i millesimi dell'intiera rivoluzione. I giri completi si leggono ad un indice fisso N davanti al quale passano le divisioni di un piccolo quadrante L. Questo quadrante è posto in movimento dall'albero di rotazione della rotella mercè

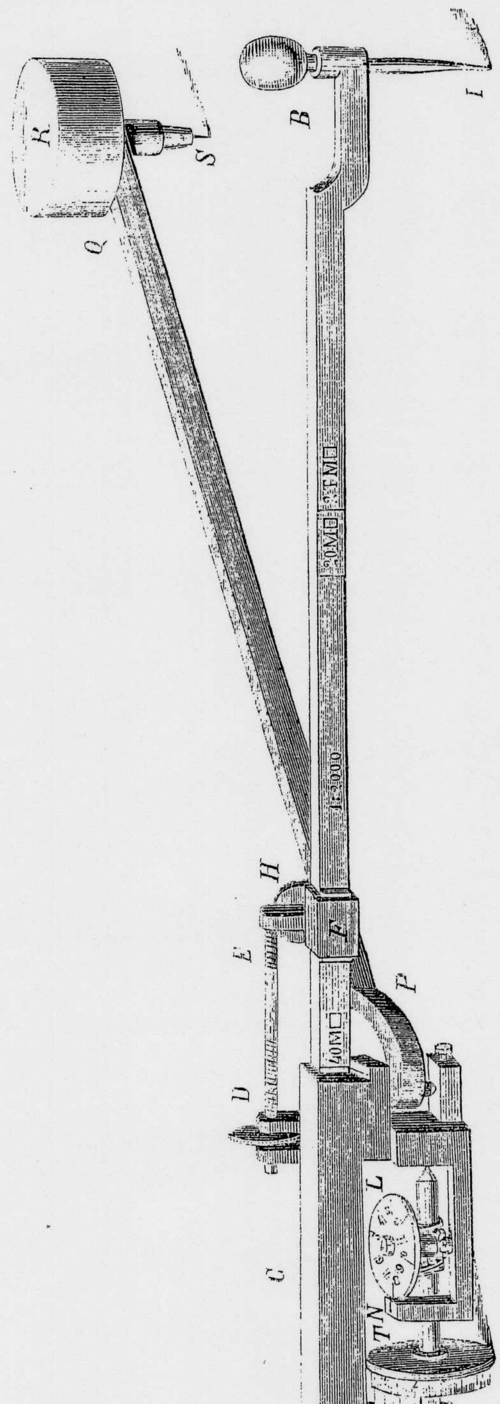


Fig. 720.

una vite perpetua la quale imbocca con un rocchetto a 10 denti calettato sull'asse del quadrante L. Ad ogni rivoluzione della rotella questo quadrante ruota di un decimo di giro, e, come il suo contorno è diviso in 10 parti uguali, si cambia una divisione all'indice N. Il braccio maggiore A B del planimetro deve potersi allungare od accorciare a seconda dei casi. A tale uopo al cursore C è congiunto un manicotto quadrato F il quale è attraversato dal braccio A B; la congiunzione è fatta dalla piccola vite di richiamo D E munita in D di un bottone che l'operatore manovra a mano, e che attraversa una madrevite corrispondente praticata in una sporgenza del manicotto F. Facendo girare il bottoncino D si avvicina o si allontana il manicotto F dal cursore C. Il bottoncino H serve a fissare il braccio A B al manicotto F. Se l'allungamento o l'accorciamento che deve subire il braccio A B del planimetro è di una certa lunghezza, allora si allenta il bottoncino H e si opera a mano indipendentemente dalla vite di richiamo D E; per piccoli spostamenti si fissa il manicotto F all'asta A B e poscia si fa ruotare il bottone D. In tal modo si raggiunge la lunghezza richiesta colla massima facilità ed esattezza.

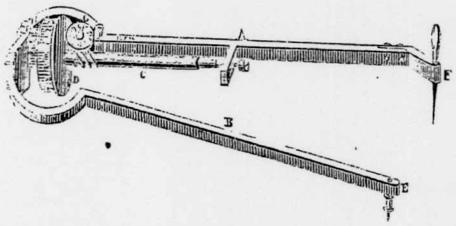


Fig. 721.

Il planimetro polare di Amsler ha talvolta la forma rappresentata dalle figure 721, 722. In questo caso l'apparecchio è alquanto più semplice; però il braccio A che porta il calcatojo essendo di lunghezza invariabile, i risultati non potranno essere espressi che in una sola specie di unità, per esempio in millimetri quadrati.

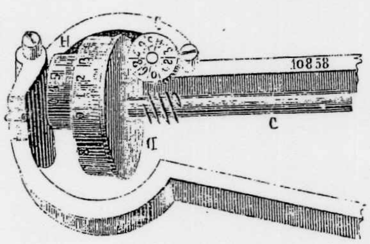


Fig. 722.

Teoria ed uso del planimetro polare. — Sia M N O (fig. 723) le figura piana chiusa di cui si vuol determinare l'area, P il polo del planimetro supponendo che esso sia disposto fuori della figura stessa, S l'articolazione dei due bracci, R la rotella, e C una posizione qualunque del calcatojo. Se questo percorre un arco infinitamente piccolo C C' del perimetro M N O, i due bracci dello strumento prendono le posizioni P S', S' C', cosicchè il braccio S C descrive la superficie elementare C S S' C'. Conducendo da S' una retta $S'C_1$ parallela ad S C, tale area si può intendere come costituita da un parallelogrammo $S S' C_1 C$ e da un settore $C_1 S' C'$, ed il passaggio del braccio S C del planimetro dalla prima alla seconda posizione come risultante dalla combinazione di due movimenti, l'uno di traslazione G G'' e l'altro di rotazione G'' G'. In virtù della traslazione G G'' la rotella si sarà sviluppata sul piano del disegno di un arco eguale alla distanza fra le due parallele S C ed $S'C_1$; in virtù della rotazione si sarà sviluppata dell'arco G' G'' di centro S' e di raggio S' G'.

Ciò posto, diciamo:
a la lunghezza del braccio S C;
r il raggio della rotella;
x l'altezza del parallelogrammo $S C C_1 S'$;
φ l'arco di raggio 1 che misura l'angolo $C_1 S' C'$;

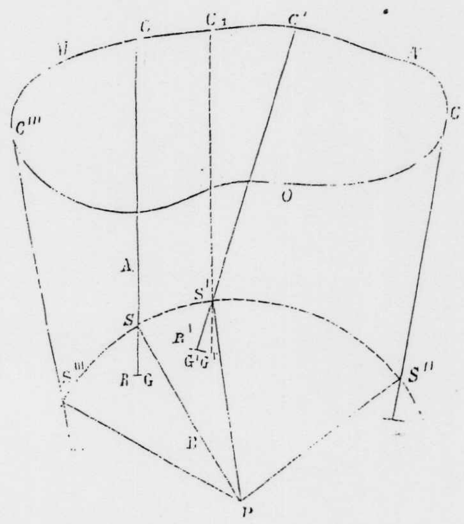


Fig. 723.

Allora le aree delle superficie $S C C_1 S'$ e $C_1 S' C'$ sono espresse rispettivamente da:

$$a x;$$

$$\frac{1}{2} a^2 \varphi;$$

e, per conseguenza, l'area del quadrilatero elementare C S S' C' sarà:
$$a x + \frac{1}{2} a^2 \varphi.$$

Ma se diciamo n il numero dei giri della rotella che corrisponde all'altezza x, si ha:

$$x = 2 \pi r n;$$

cosicchè:

$$\text{Area elem. } C S S' C' = 2 \pi a r n + \frac{1}{2} a^2 \varphi.$$

Si consideri ora l'intiero percorso del calcatojo, supponendo che esso parta dalla posizione estrema C''', descriva l'arco superiore C''' M N C'', e poscia l'arco inferiore C'' O C'''. Il braccio S C del planimetro descriverà nel primo movimento la superficie C''' M N C'' S'' S''', e nel secondo la superficie C'' O C''' S''' S''; la loro differenza costituisce evidentemente la superficie M N O da quadrarsi. Indichiamo rispettivamente con $\Omega', \Omega'', \Omega$, queste tre superficie; allora avremo:

$$\Omega' = 2 \pi a r \Sigma n' + \frac{1}{2} a^2 \Sigma \varphi';$$

$$\Omega'' = 2 \pi a r \Sigma n'' + \frac{1}{2} a^2 \Sigma \varphi'';$$

e quindi:

$$\Omega = \Omega' - \Omega'' = 2 \pi a r (\Sigma n' - \Sigma n'') + \frac{1}{2} a^2 (\Sigma \varphi' - \Sigma \varphi'').$$

Ma $\Sigma \varphi' - \Sigma \varphi'' = o$ perchè tanto $\Sigma \varphi'$ che $\Sigma \varphi''$ rappresentano l'angolo formato fra le due rette estreme S''' C''' ed S'' C'', cosicchè concluderemo:

$$\Omega = 2 \pi a r (\Sigma n' - \Sigma n'').$$

In quest'equazione $\Sigma n'$ rappresenta il numero dei giri dati dalla rotella mentre il calcatojo percorre l'arco superiore $C'''MNC''$ del perimetro dato, e $\Sigma n''$ rappresenta il numero dei giri descritti in verso contrario mentre il calcatojo percorre l'arco inferiore $C''OC'''$. La loro differenza $\Sigma n' - \Sigma n''$ rappresenta perciò il numero totale dei giri fatti della rotella mentre il calcatojo percorre l'intiero perimetro. Dicendo N questo numero totale si ha:

$$\Omega = 2\pi a r N = m N$$

facendo $\quad 2\pi a r = m.$

Concludiamo quindi che l'area Ω *della superficie* MNO *proposta è proporzionale al numero dei giri dati dalla rotella, quando il calcatojo percorre, sempre nello stesso verso, l'intiero suo perimetro.*

Il coefficiente costante m si deduce sperimentalmente mettendo nell'equazione $\Omega = mN$ per Ω l'area nota di una data figura, e per N il numero dei giri fatti dalla rotella mentre il calcatojo ne percorre l'intiero perimetro. Anche in questo caso l'esperienza si ripeterà più volte variando la forma e le dimensioni della figura data e prendendo poscia la media aritmetica dei varii valori trovati.

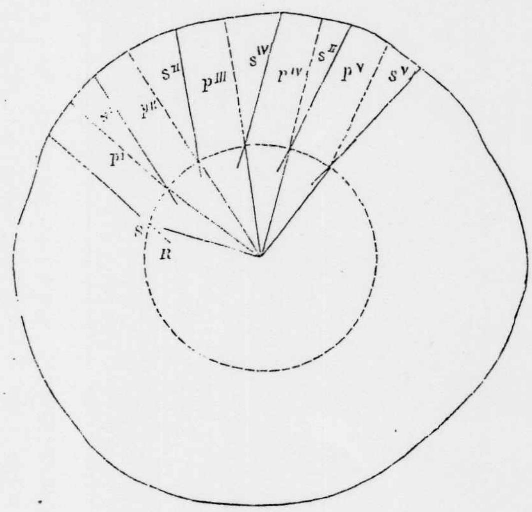


Fig. 724.

Si è supposto che il polo cada fuori della figura di cui si ricerca l'area. Se invece il polo P cadesse nell'interno di questa superficie, come è rappresentato nella fig. 724, allora il braccio SC del planimetro quando è ritornato alla sua posizione iniziale ha descritto una completa rivoluzione. In questo caso la superficie data si può intendere come composta di tre parti: un cerchio di raggio $PS = b$; la somma dei successivi parallelogrammi $p', p'', p''', \ldots$; e la somma dei settori $s', s'', s''', \ldots$ Quest'ultima somma costituisce evidentemente un cerchio di raggio a; dunque in questo caso avremo:

$$\Omega = 2\pi a r N + \pi a^2 + \pi b^2.$$

In quest'equazione N rappresenta il numero dei giri della rotella che corrispondono ai diversi parallelogrammi $p', p'', p''', \ldots$. Se indichiamo con N' il numero dei giri descritti dalla rotella stessa nel suo scorrimento sugli archi di raggio $SR = d$, si ha:

$$2\pi r N^1 = 2\pi d;$$

ossia $\quad 2\pi a r N^1 = 2\pi a d.$

Sommando membro a membro l'espressione di Ω con quest'ultima equazione e ricavando Ω risulta:

$$\Omega = 2\pi a r (N - N^1) + \pi (a^2 + b^2 + 2ad);$$

e facendo $2\pi a r = m$ ed $N - N^1 = N_1$:

$$\Omega = m N_1 + \pi (a^2 + b^2 + 2ad).$$

Quando adunque il polo del planimetro è interno alla superficie data, al prodotto mN_1 è necessario aggiungere una costante $\pi(a^2 + b^2 + 2ad)$ la quale dipende dalle dimensioni dello strumento. Tale costante rappresenta l'area di un circolo di raggio $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ad}$. Questo raggio è uguale alla distanza che separa il polo P dal calcatojo C quando il braccio SC del planimetro è disposto normalmente alla retta PR che unisce il polo col punto di contatto della rotella. Quando adunque il calcatojo descrive una circonferenza di centro P di raggio $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ad}$ si ha $\Omega = \pi(a^2 + b^2 + 2ad)$ e, per conseguenza, $N_1 = o$. In questo caso perciò la rotella non deve subire alcuna rotazione attorno al proprio asse, il che d'altra parte è manifesto perchè se il braccio SC si mantiene sempre normale alla retta PR il piano della rotella si mantiene costantemente normale alla trajettoria descritta dal suo punto di contatto.

Sempre rimanendo nel caso in cui il polo è interno alla superficie proposta, potrebbe darsi che questa superficie fosse tutta compresa entro il cerchio di raggio PS. Allora, con un ragionamento simile a quello seguito precedentemente, si ottiene:

$$\Omega = \pi (a^2 + b^2 + 2ad) - m N_1.$$

Nell'applicazione del planimetro si cerca sempre di rimanere nel primo dei tre casi considerati, cioè di disporre il polo all'esterno della figura proposto. Quando però si tratti di grandi superficie sarà necessario, affinchè riesca possibile di seguirne l'intiero perimetro camminando sempre nello stesso senso, di fissare il polo internamente: in questo caso alle indicazioni dedotte dal contatore, prese col segno positivo o col segno negativo a seconda dei casi, è necessario di aggiungere la costante $\pi(a^2 + b^2 + 2ad)$, i cui valori sono incisi sull'asta AB in corrispondenza delle varie divisioni segnate sulla medesima. Quando la figura proposta fosse così grande da non potersi far descrivere tutto il suo perimetro dal calcatojo, si scompone l'intiera superficie in superficie minori e si trovano separatamente le aree di tutte queste spostando convenientemente il polo.

Col planimetro polare si può anche ottenere con una sola operazione la somma di due o di più superficie. Basta unire due a due queste superficie con una retta ausiliaria, e seguire col calcatojo, camminando sempre nella stessa direzione, l'intiero contorno così ottenuto: tutte le rette ausiliarie saranno così percorse due volte e con verso contrario, cosicchè le rotazioni della rotella che vi corrispondono si annullano ed il numero totale dei giri corrisponde alla somma delle superficie proposte.

Il planimetro polare può servire anche a risolvere parecchie altre questioni di matematica.

Si tratti, ad es., di calcolare l'espressione

$$A = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$

la quale può essere considerata come rappresentante il doppio della somma delle aree dei triangoli che hanno rispettivamente $x_1, x_2, \ldots x_n$ per base ed $y_1, y_2, \ldots y_n$ per altezza. Tracciati due assi ortogonali, portiamo sull'uno di essi, tenendo conto dei segni, le distanze $OX_1 = x_1$, $OX_2 = x_2, \ldots$ e sull'altro le distanze $OY_1 = y_1$, $OY_2 = y_2, \ldots$

Completiamo poscia i triangoli OX_1Y_1, OX_2Y_2,... e descriviamo col calcatojo del planimetro il contorno poligonale $OY_1X_1OY_2.....Y_nX_nO$. L'area data dallo strumento sarà uguale ad $\frac{A}{2}$.

Siano rispettivamente x_1 ed y_1, x_2 ed y_2,....., x_n ed y_n le coordinate di n vertici di un poligono piano, riferito a due assi ortogonali. L'area di questo poligono è:

$$A = x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3 + ... + x_ny_1 + y_nx_1.$$

Applicando a questa somma il procedimento testè indicato, si otterrà, col planimetro, l'area del poligono proposto, senza doverlo costruire.

Il planimetro polare di Amsler permette di ottenere, nella misura delle aree piane, un'approssimazione che un abile operatore può spingere fino ad $1/_{1000}$ ed anche ad $1/_{2000}$. Tale approssimazione, che per le figure irregolari è più grande di quella che è possibile di ottenere colle formole atte alla quadratura di tali superficie, dipende da parecchie cause. e principalmente dalla buona costruzione dello strumento e dall'esattezza con cui si seguono i contorni delle figure da misurarsi. Anche la natura della carta su cui è tracciata la figura ha una certa influenza sul grado di esattezza dato dal planimetro; questa carta non dev'essere troppo liscia, nè troppo rugosa, e disposta sopra una superficie ben piana.

BIBLIOGRAFIA. — A. Favaro, *Lezioni di statica grafica*, Padova 1877; *Leçons de statique graphique traduites de l'italien par Paul Terrier*, Paris 1885. — M. Rous, *Instruments et machines à calculer*. Études sur l'exposition de 1867, Paris, 2e Série, pag. 69. — Karmasch und Heeren's, *Technisches Wörterbuch*, Prag 1877. — Spons, *Dictionary of Engineering*. — Laboulaye, *Dictionnaire des arts et manufactures*. — *Repertorium der technischen Literatur von Bruno Kerl*, Leipzig 1873. — Stamm, *Essais sur l'automatique pure*, Milan 1863. — Laboulaye, *Traité de Cinématique*, Paris 1878.

Oltre a queste opere, che trattano in generale delle macchine calcolatrici, si potranno consultare le seguenti pubblicazioni speciali.

Addizionatore di Roth. — *Rapport fait par M. Théodore Olivier, au nom du comité des arts mécaniques, sur des machines à calculer présentées par M. le docteur Roth, boulevard des Capucines*, 21; seguito da una *Nomenclature chronologique des instruments à calcul* (*Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, 1843, pag 411).

Aritmometro di Thomas. — *Rapport fait par M. Francœur, au nom du Comité des arts mécaniques, sur la machine à calculer de M. le chevalier Thomas, de Colmar, directeur honoraire de la Compagnie d'assurance du Phénix, rue de l'Echiquier, n.* 33, *à Paris* (*Bulletin de la Société d'encouragement*, ecc., Paris 1822, pag. 33). — *Description d'une machine à calculer nommée Aritmomètre, de l'invention de M. le chevalier Thomas de Colmar; par* M. Hoyau (*Bulletin de la Société d'encouragement*, ecc., Paris 1822, p. 355). — M. Benoît, *Rapport sur l'Aritmomètre perfectionné, inventé par M. Thomas de Colmar, directeur de la Compagnie d'assurance le Soleil, rue de Helder*, 13 (*Bulletin de la Société d'encouragement*, ecc. Paris 1851, pag. 113). — *Rapport fait par M. Sebert, au nom du Comité des arts économiques, sur la machine à calculer, dite Aritmomètre, inventée par M. Thomas* (*de Colmar*) *et perfectionnée par M. Thomas de Bojano*, 44, *rue de Châteaudun, à Paris* (*Bulletin de la Société d'encouragement*, ecc., Paris 1879, pag. 393). — Hirn, *Notice sur l'utilité de l'Aritmomètre et de l'hydrostat* (*Annales du Génie civil*, 1863). — *Annali del Regio Istituto Tecnico Industriale e Professionale di Torino*, anno IX, 1879-80, pag. 93. Memoria del professore A. Cavallero. — *Dictionnaire de mathématique appliquée*, H. Sonnet, Paris 1867. — *Annales des ponts et chaussées*, 1854, 3a serie, pag. 311. *Estrait d'un rapport par* M. Lemoyne. — *Instruction pour se servir de l'Arithmomètre, machine à calculer*, inventé par M. Thomas (de Colmar), Paris 1873. — S. Reuleaux, *Civil Ingénieur*, vol. 8, pag. 181. — Dingler, *Politecnisches Journal*, vol. 165, pag. 334; vol. 179, pag. 260; vol. 234, pag. 248. — *Polytecnisches Centralblätt*, Leipzig 1864, pag. 977. — *Berg und Hüttenmännische Zeitung*, Freiberg und Leipzig 1864, pag. 396. — Toepler's, *Verfahren des Radicirung mittelst der Thomas'schen Rechenmaschine* (*Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Prusses*, Berlin 1865, pag. 112). — *The Engineer*, vol. 29, pag. 319. — *The journal of the Franklin Institute*, Philadelphia, 3a serie, vol. 61, pag. 372. — *The mechanics Magazine*, ecc., vol. 26 pag. 229.

Compasso di proporzione. — *Le operazioni del compasso geometrico e militare di Galileo Galilei*, Padova, 10 luglio 1606. — Muzio Oddi da Urbino, *Fabrica et uso del compasso polimetro*, Milano 1633. — *Galileo Galilei, il compasso geometrico adatto, per opera di* Giacomo Lusneberg, *fabbricante di istrumenti matematici*, ecc., Roma, per Dom. Ant. Ercole, 1698. — *Della fabbrica ed uso del compasso di proporzione*, del gesuita P. Paolo Casati, Bologna, per Gioseffo Longhi, 1685. — *De circino proportionis*, del tedesco Nicola Goldmann, Leida 1696, Ulma 1697. — Giacomo Ozanam, *De l'usage du compas de proportion expliqué et démontré*, etc., Paris 1688. — Samuele Cramer, *Nuovo trattato della costruzione ed uso del compasso di proporzione*, Londra, presso G. Wilcow e Tommaso Stearth, 1728. — G. Pagnini, *Costruzione ed uso del compasso di proporzione*, Napoli, presso Ignazio Rusca, 1753. — G. Marchelli, *Trattato del compasso di proporzione*, Milano 1759.

Regolo ed altri apparecchi a divisione logaritmica. — Quintino Sella, *Teorica e pratica del regolo calcolatore*, Torino 1859. — B. Plebani, *Il regolo calcolatorio e l'aritmetica logaritmica*, Torino 1868. — A. Galassini, *Manuale teorico-pratico per l'uso del regolo calcolatore Mannheim*, Torino 1886. — A. Favaro, *Sulla elica calcolatoria di Fuller con cenni storici sopra gli strumenti calcolatori a divisione logaritmica* (*L'Ingegneria civile*, ecc., 1879, pag. 138).

Quest'ultima pubblicazione contiene un'estesa bibliografia degli apparecchi a divisione logaritmica.

Planimetri. — V. Arnò, *Sul planimetro polare di Amsler* (Annali del R. Istituto Industriale e Professionale di Torino, 1877-78). — S. Cappa, *L'integratore o planimetro dei momenti di l. Amsler-Laffon* (Atti della Società degli Ingegneri ed Industriali di Torino, 1882, pag. 22). — Abdank-Abakanowics, *Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications*, Paris 1886. — A. Favaro, *L'integratore di Duprez ed il planimetro dei momenti di Amsler*. Lettera all'abate F. M. Moigno, Padova 1872. — A. Favaro, *Beiträge zur Geschichte der Planimeter, Separat-Abdruck aus der « Allgemeinen Bauzeitung »*, Wien 1873.

Queste due ultime pubblicazioni contengono un'estesa bibliografia dei planimetri.

Ing. GIUSEPPE PASTORE.